MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

1993. JANUÁR ára: 86,- Ft I. évf. / 1. szám

F22

TARTALOM

DOBOZOK KITÖLTÉSÉRŐL
Csete Lajos gimnáziumi tanár, Kapuvár

LEHET ÉRDEKESEBBEN IS? FELADATOK HATSZÖGTÁBLÁRA
Tóth Sándor gimnáziumi tanár, Sárospatak

A TIT KALMÁR LÁSZLÓ ORSZÁGOS MATEMATIKAVERSENYÉNEK 1992. ÉVI DÖNTŐJÉRŐL
Dr. Urbán János

EGY GIMNÁZIUMI KÍSÉRLETI VIZSGARENDSZER
Barna Katalin - Forgács Jánosné - Kovács Ferenc - Kovács Mária gimnáziumi tanárok, Oroszlány

A VARGA TAMÁS ORSZÁGOS MATEMATIKAVERSENY 2. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

VERSENYFELHÍVÁS

KÖNYVISMERTETÉS
Paál Györgyné főiskolai adjunktus, Budapest

Néha előfordul, hogy dobozokat kell megraknunk. Ilyenkor esetleg érdemes elgondolkodni azon, hogy egyáltalán kitölthető-e a doboz a megadott elemekkel.

A neves holland matematikus N. G. de Bruijn-nak 7 éves korában feltűnt, hogy egy $6 \times 6 \times 6$-os kockát ... *(4. oldal)*

Vissza-visszatérő gondot jelent, hogy a diákok jó része – általános iskolai előzmények okán is – idegenkedik a középiskolás geometria anyagtól. Különösen nagy problémát jelent ez akkor, ha az algebrai módszerek terén is vannak hiányosságai a gyereknek. *(6. oldal)*

Iskolánk, az oroszlányi Lengyel József Gimnázium 1989 óta helyi tantervének fejlesztése során kiemelt figyelmet fordít az értékelésre. E munka keretét az a Közoktatásfejlesztési Alaphoz benyújtott pályázat adta, melynek címe: *Hatékonyságnövelő programok, eljárások, ...* *(10. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Kiadói szerkesztő: Földvári Erika
Tördelő szerkesztő: Reményfy Tamás
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 430 Ft
A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Hirdetésekkel kapcsolatos felvilágosítás:Tóth Mónika,
Tel.: (62) 312-988

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Dürer Nyomda Kft., Gyula
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

DOBOZOK KITÖLTÉSÉRŐL
Csete Lajos gimnáziumi tanár, Kapuvár

LEHET ÉRDEKESEBBEN IS? FELADATOK HATSZÖGTÁBLÁRA
Tóth Sándor gimnáziumi tanár, Sárospatak

A TIT KALMÁR LÁSZLÓ ORSZÁGOS MATEMATIKAVERSENYÉNEK 1992. ÉVI DÖNTŐJÉRŐL
Dr. Urbán János

EGY GIMNÁZIUMI KÍSÉRLETI VIZSGARENDSZER
Barna Katalin - Forgács Jánosné - Kovács Ferenc - Kovács Mária gimnáziumi tanárok, Oroszlány

A VARGA TAMÁS ORSZÁGOS MATEMATIKAVERSENY 2. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

VERSENYFELHÍVÁS

KÖNYVISMERTETÉS
Paál Györgyné főiskolai adjunktus, Budapest

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 10-12 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek. Míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat.

BEKÖSZÖNTŐ

Köszöntjük az Olvasót abból az alkalomból, hogy kézbe vette, lapozgatja, és olvassa A Matematika Tanításának 1993. évi első számát.

Rohamosan változó korunkban remélhetőleg ismét eljutunk oda, hogy a matematikatanítás elméleti és gyakorlati problémáinak hosszabb távon is önálló folyóirata lesz ez az évente öt számmal jelentkező lap.

Meggyőződésünk, hogy a közoktatás reformját a mindennapi gyakorlati munka valósíthatja meg, hogy a fejlődés, a jobbítás rajtunk, pedagógusokon múlik. A matematikát tanító kollégáink munkáját kívánjuk segíteni a matematika eredményeinek közlésével, oktatási módszerek, tapasztalatok bemutatásával. Tájékoztatást nyújtunk szakmai rendezvényekről, továbbképzésekről. Szeretnénk a matematikatanítás jobbá tételének ügyét szolgálni.

Hogy lapunk valóban közkedvelt és olvasott legyen, számítunk Olvasóink segítségére, írásaira is. Szívesen látunk közlésre szánt cikkeket, feladatsorokat, kísérleti beszámolókat, versenyhíreket. Minden olyan, közérdeklődésre számot tartó közleményt, ami ötleteket, felhasználható feladatokat tartalmaz a matematikaoktatással összefüggő kérdésekről.

Rendszeresen foglalkozni fogunk a 10-18 éves korosztály matematikatanításával kapcsolatos kérdésekkel.

Tervezzük, hogy a következőkben versenybeszámolókat közlünk, „ötletsarkot" indítunk, kísérleti tapasztalatokról, nyári táborokról is szívesen adunk tájékoztatást. Tudósítani szándékozunk az új könyvekről, olyan könyvismertetéseket is közlünk, amelyek az olvasók, felhasználók tájékozódását segítik.

Szívesen látjuk az Olvasók észrevételeit, javaslatait, tanácsait is, ezeket előre is köszönjük.

Urbán János

Dr. Urbán János
főszerkesztő

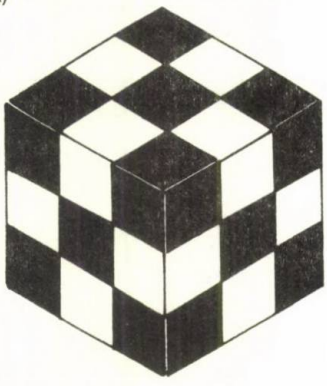
Csete Lajos

DOBOZOK KITÖLTÉSÉRŐL

Néha előfordul, hogy dobozokat kell megraknunk. Ilyenkor esetleg érdemes elgondolkodni azon, hogy egyáltalán kitölthető-e a doboz a megadott elemekkel.

A neves holland matematikus N. G. de Bruijn-nak 7 éves korában feltűnt, hogy egy $6 \times 6 \times 6$-os kockát nem tud kitölteni $1 \times 2 \times 4$ -es téglákkal.

Igazoljuk, hogy nem lehetséges a kitöltés! A sakktábla-színezés módszerét alkalmazzuk! Osszuk fel a $6 \times 6 \times 6$-os kockát $2 \times 2 \times 2$-es kis kockákra, és ezeket színezzük ki fehérre illetve feketére a sakktábla-színezés szerint! (1. ábra)

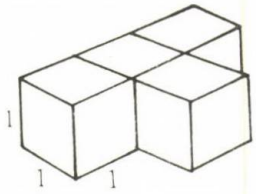


A doboz térfogata $6 \times 6 \times 6 = 216$ egység, egy kis kocka térfogata $2 \times 2 \times 2 = 8$ egység, így $216 : 8 = 27$ darab kis kockára osztottuk fel a dobozt.

Bárhogyan is szemelünk ki a dobozból egy benne elhelyezett téglát, az mindig 4 fehér és 4 fekete $1 \times 1 \times 1$ -es kockát tartalmaz. Vagyis ha tégláinkkal lehetséges a kitöltés, akkor a dobozban azonos számú fekete és fehér $1 \times 1 \times 1$ -es kocka van. De a dobozban valamelyik színű $1 \times 1 \times 1$ -es kockából 8 darabbal több van, hiszen a 27 páratlan szám. Így dobozunkat nem lehet kitölteni tégláinkkal.

Próbáljuk meg a módszert alkalmazni a következő feladaton!

Kitölthető-e egy $10 \times 10 \times 10$ -es doboz $1 \times 1 \times 1$ -es téglákkal?



A sakktábla-színezési módszer nemcsak téglák esetén működhet. Nézzük a harmadik feladatot!

Kitölthető-e egy $9 \times 10 \times 10$ -es doboz a 2. ábrán látható idomokkal?

Most a $9 \times 10 \times 10$-es dobozt 900 db $1 \times 1 \times 1$ -es kis kockára bontjuk fel, és ezeket a sakktábla-színezés szerint fehérre illetve feketére festjük. 450 db fehér és 450 db fekete kis kockánk van. Képzeljük el, hogy idomainkkal kitöltöttük a dobozt! Ha kiszemelünk a dobozban egy idomot, akkor két eset lehetséges. Az idom 3 fehér és 1 fekete, vagy 3 fekete és 1 fehér kis kockát tartalmaz. De ugyanannyi idom kell mind a két típusból, hiszen a fekete és fehér kis kockák számának meg kell egyeznie. Vagyis a kitöltéshez szükséges idomok száma páros. Ez ellentmondás, mert a kitöltéshez szükséges idomok száma 225. Azaz a kitöltés nem lehetséges.

Visszakanyarodva a téglákkal való kitöltéshez, N. G. de Bruijn nem hagyta abba a kérdés vizsgálatát gyermekkorában. Később 1969-ben közzétette a következő tételt:

Legyenek a, b és c pozitív egész számok. Egy téglát harmonikusnak nevezünk, ha

térfogata $a \times ab \times abc$ alakú.

Egy dobozt $a \times ab \times abc$ térfogatú harmonikus téglákkal akkor, és csak akkor tudunk kitölteni, ha a doboz térfogata

$$ap \times abq \times abcr,$$

valamely p, q és r pozitív egészekre.

A tétel ismeretében könnyen megválaszolhatjuk a holland matematikus korai problémáját. Ott $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ és 4 nem osztója 6-nak, így a $6 \times 6 \times 6$-os kocka nem tölthető ki $1 \times 2 \times 4$-es téglákkal.

De Bruijn egy másik eredménye az, hogy ha egy tégla nem harmonikus, akkor mindig található hozzá egy doboz, amely a téglának nem többszöröse az előző értelemben, mégis kitölthető ezekkel a téglákkal.

Megvallom, számomra szimpatikusabbak azok a feladatok, amelyeknél nem is lehet kitölteni a dobozt, így neki sem kell fogni a kimerítő pakolásnak. Aki viszont kedveli a rakodást, annak a figyelmébe ajánlom a következő nevezetes problémákat.

A Slothouber - Graatsma feladvány:

Egy $3 \times 3 \times 3$ -as kockába helyezzünk el 6 db $1 \times 2 \times 2$ -es és 3 db $1 \times 1 \times 1$ -es téglát! Hogyan helyezkednek el a téglák? *(Jan Slothouber és William Graatsma holland építészek problémája.)*

A Conway feladvány:

Egy $5 \times 5 \times 5$-ös kockát rakjunk össze 13 db $1 \times 2 \times 4$-es, 1 db $2 \times 2 \times 2$-es, 1 db $1 \times 2 \times 2$-es és 3 db $1 \times 1 \times 3$ -as téglából! *(John Horton Conway angol matematikus problémája.)*

Jó munkát! Akik megunják a rakodást, azok például Csirmaz László cikkében [3] rátalálhatnak a megoldásra.

Irodalom

[1] Ross Honsberger: Mathematical Gems II. The Mathematical Association of America, 1976.

[2] Liszkai Sándor: Válogatott elemi matematikai feladatok, Szakdolgozat, Szeged, 1987.

[3] Csirmaz László: Összerakós játékok KÖMAL, 1985/8-9.

A

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ

KÖNYVAJÁNLATA

Kosztolányi - Mike - Palánkainé - Szederkényiné - Vincze

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából 10-14 éveseknek

A példatár a jelenlegi általános iskolai matematikai tantervnek és a nemzeti alaptanterv tervezett célkitűzéseinek és követelményeinek figyelembe vételével a címben jelzett korosztály által elsajátítandó tananyaghoz tartalmaz bőséges mennyiségű feladatot tematikus csoportosításban.

Az egyes feladatcsoportok elsősorban a gyakorlást, a tananyag elmélyítését szolgálják, de lehetőséget nyújtanak az ellenőrzésre, az elsajátított ismeretek, a feladatmegoldó készség kipróbálására is. A könyv a feladatok megoldását nem tartalmazza, ezért iskolai számonkérésre is jól használható.

Megjelenés időpontja: 1993. április
ára: 298,- Ft

Tóth Sándor

Lehet érdekesebben is? Feladatok hatszögtáblára

Vissza-visszatérő gondot jelent, hogy a diákok jó része - általános iskolai előzmények okán is - idegenkedik a középiskolás geometria anyagtól. Különösen nagy problémát jelent ez akkor, ha az algebrai módszerek terén is vannak hiányosságai a gyereknek. Az állandó sikertelenség kedvetlenné teszi, s hacsak nincs különösen nagy szorgalma, sok kellemetlen percet jelentenek neki a tanórák.

Természetesen a feszített tanterv, a magas óraszámok nem sok lehetőséget adnak arra, hogy érdekes feladatokkal színezzük az eléggé „száraznak" ható anyagot feldolgozó órákat. Igaz ez még akkor is, ha a szaktanárok meg vannak győződve az ellenkezőjének szükségességéről. Ilyenkor tesznek jó szolgálatot az olyan feladatok, feladatsorok, melyek az érdeklődést felkeltik, ill. fokozzák.

Az alábbi feladatsor bevallottan ilyen szempontok figyelembevételével készült. Azzal, hogy a gyerekek számára kevéssé ismert segédeszközzel, a hatszögtáblával kapcsolatos feladatokat tartalmaz, talán elég szokatlannak és érdekesnek tűnik remélem nemcsak a diákok, hanem jónéhány kollégám számára is.

Az egyes feladatok önállóan is megállják a helyüket, de célszerűnek tartanám, ha a középiskolai tanulmányok kezdetén, első osztályban kezdenék a problémák megoldását. Szinte minden témakörhöz található vagy készíthető a sorba illő feladat. Egy bizonyos idő után már ismerős segédeszközt használhatnak a diákok, amivel a gátlások talán valamilyen mértékben oldhatók.

Bízom abban, hogy némi szemléletbeli változást is hoz a téma négy éven keresztül történő feldolgozása, ha a gyerek látja, számára teljesen összefüggés nélkülinek vélt matematikai témakörök között is van kapcsolat. A matematika iránt érdeklődők pedig valószínűleg nem bánják, hogy a tárgy sokszínűségének egyik újabb bizonyítékát kapják.

Egységnyi oldalú, egybevágó szabályos hatszögek oldalak mentén történő egymáshoz illesztésével kapjuk a hatszögtáblát. *M*-esnek nevezzük a táblát, ha oldalait rendre *m* darab kis hatszög alkotja, ezek neve: mező. Az 1. ábrán egy hármas táblát látunk.

Feladatok:

1. Hány mezőből áll a hatszögtábla, melynek oldalát *m* darab hatszög alkotja?
2. A középpontból indulva bejárható-e úgy a tábla, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk?
3. Sarki mezőről indulva bejárható-e a tábla, ha minden mezőt csak egyszer érinthetünk?
4. Legkevesebb hány színnel színezhető ki a hatszögtábla, ha azonos színű mezőknek nem lehet közös pontja?
5. Kiszínezzük a táblát úgy, hogy az azonos színű mezőknek nincs közös pontja: kék

(*K*), sárga (*S*), piros (*P*). Az egyes mezőkre csak *KSP* sorrendben léphetünk. Ha *n* lépés után visszaérünk a kiindulási pontba, mennyi maradékot ad *n* 3-mal osztva?

6. Az előző feladat feltételei szerint (három színnel színezünk, s csak *KSP* sorrendben lépkedhetünk) végigjárjuk a táblát úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk. Visszajuthatunk-e a kiindulásival szomszédos mezőre?

7. Egy *m*-es hatszögtáblát metsző egyenes legfeljebb hány mezőt metsz két-két pontban?

8. Egy *m*-es táblát metsző egyenesnek maximum hány mezővel van kettőnél több metszéspontja?

9. Az *m*-es táblába írható körök közül melyiknek a sugara maximális?

10. Minimum mekkora azon kör sugara, amely az *m*-es hatszögtáblát teljes egészében lefedi?

11. Mekkora az *m*-es táblába írható, maximális területű hatszög oldalhossza?

12. Mekkora oldalhosszúságú szabályos hatszöggel fedhető le az *m*-es tábla, ha azt is megköveteljük, hogy területe minimális legyen?

13. Mekkora azon körök sugarainak összege, amelyeknek középpontja a táblaközéppont, nincs a táblához nem tartozó pontjuk, és sugaruk egész szám?

14. Egy *m*-es hatszögtábla $12k^2 + 6k + 1$ mezőből áll. Hány darab kis hatszög alkotja egy-egy oldalát?

Útmutatások és megoldások:

1. Hagyjuk el a tábla szélein álló $6(m-1)$ darab mezőt. Az eredetihez hasonló táblát kapunk, de most egy oldalt $m-1$ darab hatszög alkot. Ha S_m az eredeti tábla mezőinek száma, akkor:

$$S_m = 6(m-1) + S_{m-1}$$

$$S_{m-1} = 6(m-2) + S_{m-2}$$

$$\vdots$$

$$S_2 = 6 \cdot 1 + S_1$$

$$S_1 = 1$$

Innen:

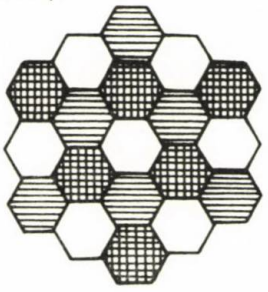
$$S_m = 1 + 6[1 + 2 + \ldots + (m-2) + (m-1)] =$$

$$= 3m^2 - 3m + 1$$

2. Igen. Induljunk el a középső mezőről, s csigavonalban haladjunk a tábla széle felé.

3. Igen. Hasonlóan az előző feladat megoldásához, csigavonalban haladhatunk.

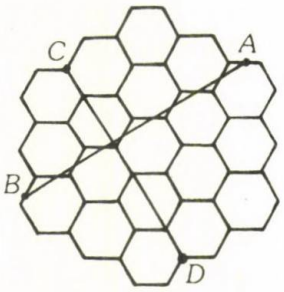
4. Három színnel színezhető ki. Kezdjük a színezést a középső mezőn, s haladjunk kifelé! (2. ábra).



5. Nullát, mert *n* osztható hárommal. A bejárt mezők sorrendje: *KSP KSP KSP K...* A sorozat három hosszúságú periódusokból áll, s így a kiindulási mezővel azonos színű mezőre csak úgy juthatunk, ha annyi lépést teszünk, amely osztható hárommal.

6. Nem. A tábla $3m^2 - 3m + 1$ mezőből áll, bejárásához $3m^2 - 3m$ lépés szükséges. Ez viszont hárommal osztható, így a végén olyan színű mezőre érkezünk, mint amilyenről elindultunk. Ilyen mező viszont nem lehet a kiindulásinak szomszédja.

7. A megoldás: $4m - 3$. Kössük össze az *A* és *B* pontokat, majd az általános esetre következtessünk: $2m - 1 + 2m - 2 = 4m - 3$. (3. ábra).



8. Lássuk be, ha kettőnél több metszéspont van, akkor végtelen sok is van. Kössük össze a C és D pontokat, majd az előző feladat megoldásához hasonlóan következtessünk az általános esetre. A megoldás: m. (3. ábra).

9. Válasszuk szét a megoldást aszerint, hogy m páros vagy páratlan.

   m páros:

   A keresett sugárt pl. az OE egyenese tartalmazza.

   A kör sugara: $r = \dfrac{3m-2}{2}$. (4. ábra)

   m páratlan:

   Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt ($m = 3$ esetben az OFG háromszögre)!

   A sugár: $R = \dfrac{\sqrt{(3m-2)^2+3}}{2}$. (4. ábra)

10. Az OHK háromszögből általánosítva, és a Pitagorasz-tételt alkalmazva:

    $R = \sqrt{3m^2 - 3m + 1}$. (4. ábra)

11. Tangens szögfüggvényt használva az MNL háromszögből

    $x = \operatorname{tg} 30°$. Innen: $LP = \dfrac{2\sqrt{3}}{2}$.

    A hatszög oldala:

    $a = \dfrac{\sqrt{3}(3m-2)}{3}$. (5. ábra)

12. Belátva, hogy az ORS háromszög szabályos, azonnal adódik az előző megoldáshoz hasonlóan:

    A hatszög oldala:

    $b = \dfrac{\sqrt{3}(3m-1)}{3}$. (6. ábra)

13. Összesen m darab ilyen tulajdonságú kör van. Sugaraik rendre:

    1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, ...

    Válasszuk szét ezt a sorozatot két számtani sorozatra, és képezzük a tagok összegét.

    Ha m páros:

    1, 4, 7, 10, 13, 16, ... $\dfrac{m}{2}$ db tag

    2, 5, 8, 11, 14, 17, ... $\dfrac{m}{2}$ db tag

    megoldás: $S = \dfrac{3m^2}{4}$.

    Ha m páratlan:

    1, 4, 7, 10, ... $\dfrac{m+1}{2}$ db tag.

    2, 5, 8, 11, ... $\dfrac{m-1}{2}$ db tag.

    Az összeg: $S = \dfrac{3m^2+1}{4}$.

14. Oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenletet, az első feladat megoldását is felhasználva:

    $3m^2 - 3m + 1 = 12k^2 + 6k + 1$

    A megoldás: $m = 2k + 1$

    A hatszög oldalát tehát $2k + 1$ darab kis hatszög alkotja.

Tapasztalatok, felhasználási javaslatok:

Első osztályban a gyerekek nagy örömmel láttak hozzá a hármas hatszögtábla elkészítéséhez, amit szerkesztés után kartonból vágtak ki. Elkészítését feltétlenül javaslom, mert bár a feladatok megoldásához elegendő a középisko-

lás tananyag, nem árt, ha előttünk van a segédeszköz, enélkül nehezen áttekinthető egyik-másik probléma. Az órai szerkesztés nehézségekbe ütközik. Még a színezés is bizonyos kapcsolatot jelent az általános iskolai, viszonylag könnyedebb, játékosabb anyagfeldolgozással.

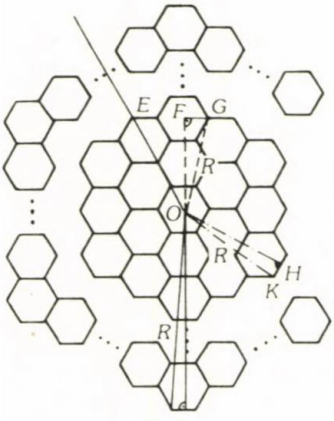
- Ha valamelyik feladat általános esetben túl nagy falat lenne a diákoknak, fogalmazzuk meg speciális esetben $m = 3$, 4-re. Egy feladatot így többször is elővehetünk a csoport előrehaladásától függően.
- Heterogén összetételű csoportokban lehetőség van egyidőben ugyanazon feladat megoldására. A különbséget az m megválasztása jelentheti. Egyszerű speciális eset pl. $m = 3$, bonyolultabb $m = 5$, 6, nehéz az általános eset.
- Az egyes feladatok kiindulási alapot is jelenthetnek. A diákok fantáziájában bízhatunk, egészen fantasztikus ötleteik vannak – jó értelemben – a matematikában is. Többször gond van viszont a kiagyalt probléma megoldásával. Adjunk ehhez hathatós segítséget!
- Az előzőeket figyelembe véve, a feladatokat szakköri, vagy fakultációs csoportbeli feldolgozásra feltétlenül javaslom.
- Kartársaimat is arra biztatom, próbáljanak meg az éppen aktuális témakörrel kapcsolatos feladatokat keresni a hatszögtáblán. Ízelítőül néhány újabb, „kedvcsináló" probléma:

15. Három színnel kiszínezve a táblát, hány darab kis hatszög van az egyes színekből? (Két azonos színű hatszögnek nincs közös pontja).

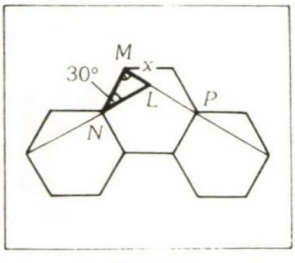
16. Mekkora a táblába írható, maximális területű négyzet oldalhossza?

17. Minimálisan mekkora legyen azon négyzet oldalhossza, amely teljes egészében lefedi a táblát?

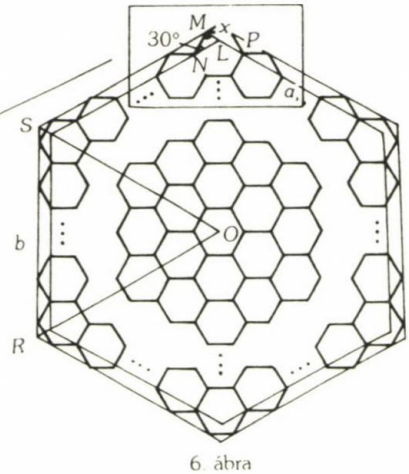
18. Hány olyan kör van, amelynek középpontja a táblaközéppont, kis hatszögcsúcsokon is átmegy, és a sugara egész szám?



4. ábra



5. ábra



6. ábra

Barna Katalin - Forgács Jánosné
Kovács Ferenc - Kovács Mária

Egy gimnáziumi kísérleti vizsgarendszer

Iskolánk, az oroszlányi Lengyel József Gimnázium 1989 óta helyi tantervének fejlesztése során kiemelt figyelmet fordít az értékelésre. E munka keretét az a Közoktatásfejlesztési Alaphoz benyújtott pályázat adta, melynek címe: *Hatékonyságnövelő programok, eljárások, szerkezeti megoldások egy kisvárosi gimnáziumban*, szerzője dr. Baráth Tibor.

A belső értékelési rendszerünk egyik fontos eleme a **vizsgarendszer**. Olyan vizsgarendszert szeretnénk meghonosítani, amely megbízható módon méri a tanulói teljesítményeket, megfelelő felkészülési lehetőségeket kínál, alkalmazkodik a tanulók érdeklődéséhez, képességeihez. Bevezetését a következő célokkal indokoltuk:

- *egy másfajta tanulási stílust valósít meg (a ,,rövid távú'' tudás helyett a ,,hosszú távra'' szólót),*
- *kialakítja az ismeretek rendszerezésének képességét, segíti a tananyag szerkezetének megértését,*
- *növeli az évvégi ismétlések szerepét,*
- *motivációs tényező,*
- *segíti a fakultációválasztást, a pályaorientációt,*
- *a megszerzett vizsgarutin jól hasznosítható a későbbiekben.*

A fentiek alapján a következő szabályzatot alakította ki a testület:

1. Minden tanuló a három év során legalább 8 vizsgát köteles tenni. Első osztályban idegen nyelvből, másodikban magyar nyelv és irodalomból, történelemből, matematikából és egy szabadon választott tárgyból, harmadikban idegen nyelvből és két szabadon választott tárgyból. Az egyik szabadon választott tárgynak természettudományi tárgynak, a másiknak készségtárgynak kell lennie, a harmadikra nincs megkötés.
2. Csak olyan vizsga valósulhat meg a tanév végén, amelyet az illetékes munkaközösség vagy szaktanár a tanév elején meghirdet, amelynek követelményeit, formáját nyilvánosságra hozta. A formáról a munkaközösség dönt (írásbeli, szóbeli, teszt, kísérlet, bemutató vagy csoportos vizsga). Az időpontokat az iskolai munkaterv szabályozza.
3. A szóbeli vizsgák ünnepélyes keretek között, nyitottan zajlanak. A tanulónak ezen a napon más elfoglaltságuk nincs.
4. Bár alapvetően belső vizsgáról van szó, mind az írásbeli vizsgák anyagának összeállításában, mind a szóbeli vizsgák bizottságaiban külső szakértők is részt vesznek.
5. A bizonyítványba kerülő érdemjegyet az évközi munka és a vizsgán nyújtott teljesítmény egyaránt befolyásolja. A tanév során kialakított jegyet a vizsgák eredménye legfeljebb egy jeggyel módosíthatja, de a sikertelen vizsga önmagában nem okozhat bukást. A vizsga tényét a bizonyítvány *megjegyzés rovatában* rögzítjük.

A matematika vizsga

Az objektív mérés egyik alapvető feltétele a követelmények pontos megfogalmazása. Iskolánk matematika munkaközössége elkészített egy, a tizenhat éves korra érvényes, részletezett követelményrendszert. A követelményeket két dimenzió mentén csoportosítottuk. A

tevékenység tartalma szerinti kategóriák a tantárgy jellegéből adódnak: fogalmak, tételek, eljárások. A tevékenység összetettsége szerinti szintek: az ismeret, a megértés és az alkalmazás szintje. A felsoroltakon túl szerepel még a logikai készség, az emlékezőképesség és a matematika nyelvének használata. Munkánkat Hajnal Imre és Urbán János lektorálták.

A matematika vizsga két részből áll: az írásbeli május végén, a szóbeli június elején zajlik. A tanulók felkészülését az írásbeli vizsgára ajánlott feladatok jegyzékével segítettük. A közvetlen előkészítést két évfolyamszintű formatív mérés szolgálta, amelynek tapasztalatai tanárnak és diáknak egyaránt fontosak voltak. A vizsgadolgozat 10 különböző témájú feladatból állt, ezeket 60 perc alatt kellett megoldani.

A szóbeli vizsgán előforduló fogalmakat, tételeket, bizonyításokat előre ismerték a tanulók. A vizsgán kihúzott tétellapon két fogalom és egy bizonyítás volt, ezeket a tanulók rövid felkészülés után ismertették. A vizsgáról jegyzőkönyv készült, melyben szerepelt az évközi munka értékelése (szaktanár), az írásbeli eredménye (munkaközösség), a szóbeli felelet értékelése (vizsgabizottság) és a végső érdemjegy, melyet a szaktanár ezek alapján állapított meg.

A vizsgarendszer fogadtatása iskolánkban egyértelműen jó, a szülők és a tanulók belátták szükségességét, elfogadták a szabályokat.

Az 1991/92-es tanévben munkaközösségünk más pályázók mellett megbízást kapott a szegedi Alapműveltségi Vizsgaközponttól a 16 éves kori vizsgaanyagok elkészítésére és kipróbálására. Négy tesztszériát készítettünk el, ezek mindegyike négy változatból áll. Az elmúlt tanév végén 10 gimnázium 30 osztályában végeztünk próbamérést, ezek tapasztalatai alapján fejlesztjük tovább a feladatsorokat.

Példaként a mellékletben bemutatjuk az 1. tesztszéria 4 változatát.

A ZRÍNYI ILONA MATEMATIKAVERSENYRŐL

A Zrínyi Ilona matematikaverseny 1993-ban negyedszerre kerül megrendezésre. 1990-ben és 1991-ben a verseny egyfordulós volt, 1992-ben már országosan 14000 gyermek indult, így szükségessé vált a megyei fordulók bevezetése. 1993-ban az egyre népszerűbbé váló versenyre kb. 20000 jelentkezőt várnak a szervezők. Az ország összes megyéjében és Budapest több kerületében rendeznek kerületi fordulót.

A verseny fő szervezője és a feladatok kidolgozója a kecskeméti Zrínyi Ilona Általános Iskola Matematika Munkaközössége. A verseny létrehozásának alapvető célja az volt, hogy ne csak a kiemelkedően tehetséges gyermekek jussanak versenyzési lehetőséghez, hanem bárki, aki kedvet érez tudása leméréséhez, nyugodtan asztalhoz ülhessen a feladatok megoldásához. 1993-ban a verseny megyei fordulója március 5-én lesz, jelentkezni a megyei szervezőknél lehet. A verseny országos döntőjének április 4-6-ig Kecskemét ad otthont. Az országos döntőbe a megyék legjobb eredményt elért tanulói kerülhetnek.

A verseny feladatai leginkább a logikai képességet, a koncentrálást teszik próbára, így a verseny szervezőinek szilárd meggyőződése – s a tapasztalatok is ezt bizonyítják –, hogy azok a gyermekek is, akik a magasabb szintű matematikai problémák megoldására nem képesek, óriási sikerélménnyel távoznak a versenyről , hiszen biztosan van sok olyan feladat, amelyeket ők is meg tudnak oldani.

DIAGNOSZTIKUS VIZSGARENDSZER
1992.

Kísérleti vizsgaanyag
Csak 1992-ben használható!

MATEMATIKA II. OSZTÁLY
A változat

Az iskola
fejbélyegzője:

					1

Név:_____ Osztály:_____

1. A valós számok normálalakjának és a hatványozás azonosságainak segítségével számítsd ki a kifejezés pontos értékét!

$$\frac{2000^4 \cdot 0{,}005^2}{50000 \cdot (0{,}01)^3 \cdot 800000} =$$

a	
b	
c	
d	

2. Egy derékszögű trapéz hegyesszöge 43°, a két alapja 13,5 cm, illetve 7,5 cm hosszú. Számítsd ki a szárak hosszát!

a	
b	
c	
d	
e	

MATEMATIKA II. A/2.

3. Oldjuk meg!

$$\frac{2x+1}{2x-6} - \frac{x-2}{2x+6} = \frac{8x+9}{x^2-9}$$

a
b
c
d
e
f
g

4. Egy négyzetes oszlop alapélei 5 cm, oldalélei 12 cm hosszúak. Mekkora szöget zár be a testátló az alaplappal?

a
b
c
d
e

5. Végezd el a kijelölt műveleteket!

$$\frac{(2a-1)^2-(3a-4)(3a+4)-2(1-2a)}{a^2-3} =$$

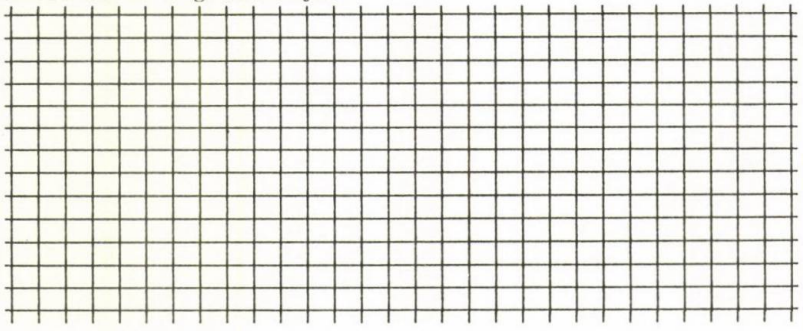
a
b
c
d
e

MATEMATIKA II. A/4.

9. Egy konvex sokszög átlóinak száma kétszerese az oldalak számának. Hány oldala van a sokszögnek? Mennyi a belső szögek összege?

a	
b	
c	
d	
e	

10. Legyen $f(x)=2\cos x+1$ a valós számokon értelmezett függvény! Készítsd el a grafikonját!



Add meg a függvény következő jellemzőit!

Értékkészlete:

Zérushelyei:

Periódusa:

Minimumértéke:

a	
b	
c	
d	
e	
f	
g	

MATEMATIKA II. A/3.

6. Add meg a szögfüggvények pontos értékét!

$\cos 60^{\circ} =$ $\quad$ $\operatorname{tg} 135^{\circ} =$

$\sin\frac{5\pi}{6} =$ $\quad$ $\cos 870^{\circ} =$

a b c d

7. Az a valós paraméter mely értékei mellett lesz az egyenletnek pozitív gyöke?

$2(x+a)+4=5a-3x$

a b c d

8. Egy körhöz egy külső P pontból szelőt és érintőt húztunk. Milyen hosszú az érintőszakasz, ha a szelő darabjai: PA=6cm; PB=12cm? (Az AB szakasz a szelőre illeszkedő húr a körben.)

a b c d

Dr. Urbán János

A TIT Kalmár László Országos Matematika Versenyének 1992. évi döntőjéről

A Kis Matematikus Baráti Körök (rövidítve KMBK-k) országos versenye már több, mint húsz éves múltra tekinthet vissza. Az 1991-es évtől kezdve a mozgalom – és így a verseny – szervezését a TIT Pest megyei szervezete karolta fel a TIT Szövetség támogatásával.

Kezdettől fogva kialakult és bevált a verseny lebonyolítási formája. A résztvevők az általános iskolai 5., 6., 7. és 8. osztálynak megfelelő korosztályok, így ma már a hatosztályos vagy nyolcosztályos gimnáziumok megfelelő korosztályos tanulói. A verseny háromfordulós. Az első, ún. iskolai fordulóban az egy csoportba tartozók versenyeznek a szakkörvezető tanár által választott módon (például a foglalkozáson írnak versenydolgozatot; a házi feladatok alapján többfordulós pontversenyen vesznek részt). A második, ún. megyei fordulóba jutó versenyzők már országosan egységes időpontban, központilag összeállított feladatsor alapján versenyeznek. A javítási útmutató is egységes, és bizonyos meghatározott pontszám fölött lehet az országos döntőbe jutni.

Az 1992. évben az országos döntőt Vácott, július 22-24-ig rendezték meg. A döntőben 32 ötödik, 24 hatodik, 21 hetedik és 18 nyolcadik osztályos versenyző szerepelt. A döntő első fordulójára július 23-án délelőtt került sor. Az ötödik és hatodik osztályosok 90 percet kaptak a kitűzött 4-4 feladat megoldására, a hetedik és nyolcadik osztályosoknak 5-5 feladat megoldására 120 percük volt. A döntő második napján, július 24-én 4-4 kitűzött feladat megoldására mindenkinek 90 perc állt rendelkezésére.

Az 1992-es döntő feladatai a következők voltak:

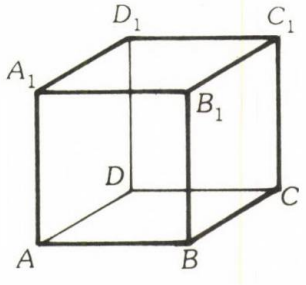
ÖTÖDIK OSZTÁLY (1. nap)

1. Hány 1-es számegy kell az 1-től 1992-ig tartó egész számok leírásához?

2. Adott egy téglalap, oldalai 6 és 2 egység. Szét lehet-e vágni egyetlen egyenes szakasszal a téglalapot két részre úgy, hogy a részekből olyan derékszögű háromszöget lehessen összerakni, amelynek két oldala 2 és 12?

3. Egy óra június 20-án reggel 8 órakor a pontos időt mutatja, ettől kezdve naponta 2,5 percet késik. Június 24-én délelőtt az óra 10 óra 30 percet mutat. Mennyi ekkor a pontos idő?

4. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka A, C, B_1, D_1 csúcsai és az A_1, C_1, B, D csúcsai is egy-egy tetraédert (négylapú testet) határoznak meg.



Mit tudsz mondani a két tetraéder közös részéről? Hány csúcsa, hány éle, hány lapja van ennek a testnek? Milyenek a lapjai?

ÖTÖDIK OSZTÁLY (2. nap)

1. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek oszthatók számjegyeik szorzatával?
2. Az Állami Biztosító - a biztosítótársaságok közti versenyben - azt a célt tűzi ki, hogy az összes rendszámmal rendelkező gépjármű nyolcad részének felelősségi biztosítását nála kössék meg. Hány gépjármű biztosítását tűzte ki célként az Állami Biztosító? (Egy rendszám három betűből és három számjegyből áll. A betűk helyére összesen 26 betű jöhet szóba.)
3. Igaz-e, hogy bármely öt egész szám között van három olyan, amelyek összege osztható 3-mal?
4. Egy adott kockát mindegyik lapjára tükrözünk. Az így kapott test (az eredeti kockával együtt) térfogata hányszorosa a kocka térfogatának? És a felszíne hányszorosa a kocka felszínének?

HATODIK OSZTÁLY (1. nap)

1. Ki lehet-e fizetni 99 Ft-ot csak 1, 2 és 5 Ft-os pénzérmékkel úgy, hogy összesen 22 pénzdarabot használunk fel és nem kell visszaadni? Ha igen, hányféleképpen?
2. Egy szabályos háromszög csúcsainak kiszínezéséhez öt szín áll rendelkezésünkre. Hányféleképpen színezhetünk, ha minden csúcsot kiszínezünk és a tükrözéssel vagy elforgatással egymásba vihető kiszínezéseket nem tekintjük különbözőnek?
3. Egy háromszög oldalai 8, 13 és 17 egység. A háromszögbe írt kör érintési pontja a 8 hosszúságú oldalt két részre osztja. Mekkora ennek a két résznek az aránya?
4. Adott egy négyzet, amelynek átlója 2 egység. Melyik az a legkisebb d szám, amelyre igaz, hogy bárhogyan veszünk fel öt pontot a négyzet belsejében, vagy kerületén, mindig kiválasztható közülük két olyan pont, amelyek távolsága kisebb, vagy egyenlő, mint d?

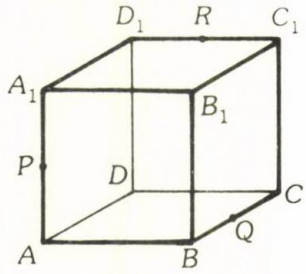
HATODIK OSZTÁLY (2. nap)

1. Melyik az a négyjegyű szám, amely egy egész szám négyzete és az első két jegye is egyenlő, meg az utolsó két jegye is egyenlő?
2. Egy téglalap oldalai 8 és 18 egység. Hogyan kell két darabra vágni úgy (nem feltétlenül egy szakasszal), hogy a két darabból egy négyzetet lehessen összeállítani?
3. Egy utca egyik oldalán 12 ház áll egy sorban, két-két szomszédos ház távolsága 100 m. Egy vállalkozó egy zöldségárusító pavilont akar építeni erre az oldalra. Az építési engedélyt azzal a feltétellel kapja meg, hogy oda kell építenie a pavilont, ahonnan számítva az utca ezen az oldalán álló összes ház távolságát lemérve és ezeket összeadva, a legkisebb számot kapunk (két ház távolságát kapuik közepének távolságával mérjük). Hová építi a pavilont?
4. Az $ABCD$ négyzet AB oldalára befelé megszerkesztjük az APB szabályos háromszöget, BC oldalára pedig kifelé a BRC szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy D, P és R egy egyenesre illeszkedik!

HETEDIK OSZTÁLY (1. nap)

1. Egy férfi így szólt az öccséhez: most kétszer annyi idős vagyok, mint te voltál akkor, amikor én olyan idős voltam, mint te vagy most. Amikor te annyi idős leszel, mint én vagyok most, akkor ketten együtt 63 évesek leszünk. Hány évesek most külön-külön?
2. A síkon az A, B, C és D pontok egy konvex négyszög csúcsai. A sík mely P pontjára igaz, hogy a négy adott ponttól mért távolságának összege a lehető legkisebb?
3. Melyek azok a tízes számrendszerbeli háromjegyű számok, amelyek egyenlők számjegyeik összegének 19-szeresével?

4. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka lapjainak átlója 2 egység, P, Q és R a megfelelő élek felezőpontjai.



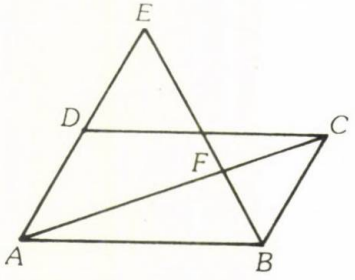
Számítsuk ki annak a síkidomnak a kerületét, amelyet a kocka a P, Q és R pontokra illesztett síkból kimetsz!

5. Egy szabályos hatszög csúcsainak kiszínezésére két szám áll rendelkezésünkre. Hányféleképpen színezhetjük ki a csúcsokat, ha minden csúcsot kiszínezünk, de azokat a színezéseket nem tekintjük különbözőnek, amelyeket a hatszög elforgatásával egymásba vihetünk át?

HETEDIK OSZTÁLY (2. nap)

1. Melyik n pozitív egész számra igaz, hogy az $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ összeg értéke olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei egyenlők?

2. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldala 4, BC oldala 2 egység, DAB szöge 60°.



Tudjuk, hogy $DE = 2$ egység. Mekkora az FB szakasz?

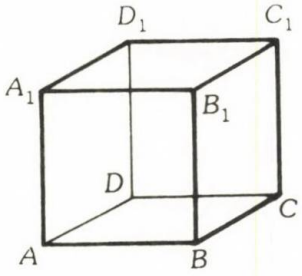
3. Egy háromszög belsejében felveszünk néhány pontot. A felvett pontokat egymással és a háromszög csúcsaival úgy kötjük össze egyenes szakaszokkal, hogy az összekötő szakaszok a háromszög belsejében ne messék egymást és a háromszöget „kis" háromszögekre bontsák. Igazoljuk, hogy a kis háromszögek száma mindig páratlan!

4. Legfeljebb hány 0-ra végződhet egy $9^n + 1$ alakú szám, ahol $n > 0$, egész?

NYOLCADIK OSZTÁLY (1. nap)

1. Melyik az a három legkisebb egymást követő pozitív egész szám, amelyek összege egy egész szám négyzete is és egy egész szám köbe is egyben?

2. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka éle 6 egység. Az AB él felezőpontja P, a CC_1 élé Q, a D_1C_1 élé pedig R.



Számítsuk ki annak a síkidomnak a kerületét, amelyet a kocka metsz ki a P, Q, R pontokra illesztett síkból!

3. Egy konvex nyolcszög összes átlóját meghúztuk. Legfeljebb hány különböző metszéspont keletkezett a nyolcszög belsejében?

4. Igaz-e a következő állítás? Ha két pozitív törtszám összege 1, akkor különbségük és négyzetük különbsége egyenlő.

5. Az ABC derékszögű háromszög BC befogója, mint átmérő fölé kört rajzolunk, ez a kör az AB átfogót a D pontban metszi. A körhöz a D pontban érintőt húzunk, ez az AC befogót E-ben metszi. Igazoljuk, hogy $EA = ED$!

NYOLCADIK OSZTÁLY (2. nap)

1. Melyik nagyobb, 202^{303} vagy 303^{202} és miért?
2. Egy téglalap alakú halastóban a halászatot megtiltották három egybevágó, a téglalap oldalával párhuzamos oldalú négyzetalakú területen. A halastó oldalai 1000 m és 1500 m, a négyzetek oldala 500 m. A három négyzet középpontja egy 400 m oldalhosszúságú szabályos háromszöget alkot, ennek a háromszögnek egyik oldala párhuzamos a téglalap hosszabbik oldalával. Mekkora területen lehet halászni?
3. Igazoljuk, hogy bármely $n \geq 1$ egész számra $21n + 4$ és $14n + 3$ legnagyobb közös osztója 1.
4. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$8(x^4 + y^4) - 4(x^2 + y^2) + 1 = 0.$$

A verseny végeredményét a két napi teljesítmény összege adta. Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra a váci városháza dísztermében került sor, a győzteseket és a versenyzőket Szentágothai János professzor, a TIT Szövetség elnöke köszöntötte. Az egyes osztályok első három helyezettjét, iskoláját és tanárát, szakkörvezetőjét soroljuk fel most.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

1. *Szakács László* Budapest, Jedlik Ányos Gimnázium, Gudénus Lászlóné és Rankli Emma;
2. *Végh Zoltán* Makó, Kálvin téri Általános Iskola, dr. Varga Istvánné;
3. *Győri Dávid* Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskola, Széplaki Györgyné;

HATODIK OSZTÁLY

1. *Zubcsek Péter* Budapest, Fővárosi Fazekas M. Gyakorló Iskola, Lajos Józsefné;
2. *Lippner Gábor* Budapest, Fillér utcai Általános Iskola, Montágh Balázs, Pósa Lajos;
3. *Vincze Zoltán* Vásárosnamény, Általános Iskola, Schmidt Sándorné;

HETEDIK OSZTÁLY

1. *Koncz Imre* Nyíregyháza, 5. sz. Általános Iskola, dr. Kiss Sándor, Dobró Zoltánné;
2. *Nyakas Péter* Zalaegerszeg, Ady Endre Általános Iskola, Boros István, Vasvári Tibor;
3. *Braun Péter* Budapest, Szent István Gimnázium, Halek Tamás;

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. *Veres Tibor* Budapest, Fazekas M. Fővárosi Gyakorló Általános Iskola, Kovács Csongorné, Pósa Lajos, Lajos Józsefné;
2. *Tarján Péter* Budapest, Tanárképző Főiskola Gyakorló Általános Iskolája, Csahóczi Erzsébet, Montágh Balázs;
3. *Hegedűs Márton* Nyíregyháza, 1. sz. Gyakorló Általános Iskola, dr. Kiss Sándor, Sike Zoltán;

Az első helyezett versenyzők tanárait és szakkörvezetőit a TIT Szövetség jutalomban részesítette.

A versenyt 1993-ban is megrendezi a Pest Megyei TIT Szervezet, a TIT Szövetség támogatásával. A versenyfelhívás, amely tartalmazza a jelentkezés feltételeit és az egyes fordulók időpontjait, megjelent a Művelődési Közlönyben (1992. 17. sz. 930-931. o.).

A Varga Tamás Országos Matematikaverseny 1992. november 4-én írt, második fordulójának feladatai

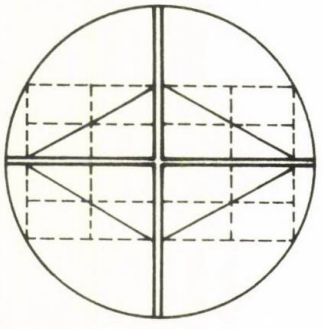
HETEDIK OSZTÁLY

1. Egy születésnapi bulin öt testvérpár jött össze. A 10 gyermek mind különböző életkorú, a legfiatalabb 4, a legidősebb 13 éves. A testvérpárok két-két tagjának életkorát összeadva a 10, 13, 17, 22 és 23 összegeket kaptuk.
   Az egyik gyerek 7 éves. Hány éves a testvére, ha minden gyerek életkora egész szám? (8)

2. 12 db 1 cm oldalélű kockából téglatestet építettünk. Mekkorák a téglatest élei, ha felszíne 34 cm^2-rel kisebb, mint a 12 kocka felszínének összege? (10)

3. Határozd meg a $\frac{3}{7}$ tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni első 1992 számjegy összegét! (10)

4. A rajz egy park kicsinyített vázlata. A szaggatott vonalakkal körülhatárolt egybevágó téglalapok a virágágyak. Az egymásra merőleges, kettős vonallal jelölt utak a park főútjai, a rombusz alakot képezők pedig a sétautak. Melyik hosszabb: a főutak együttesen, vagy a sétautak együttesen? (10)



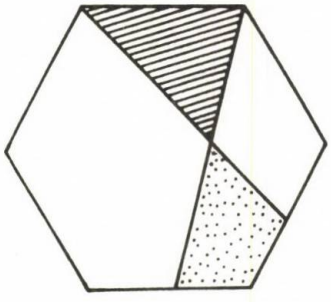
5. Emil, János, Károly és Rudolf futballoztak az udvaron, és betörtek egy ablakot. Az eset kivizsgálásakor a következőket mondták:
   Emil: Az ablakot Károly vagy Rudolf törte be.
   János: Rudolf volt.
   Károly: Nem én tettem.
   Rudolf: Én sem.
   Tanáruk, aki jól ismerte a fiúkat, így szólt: Hárman közülük mindig igazat mondanak.

   Ki törte be az ablakot? (12)

NYOLCADIK OSZTÁLY

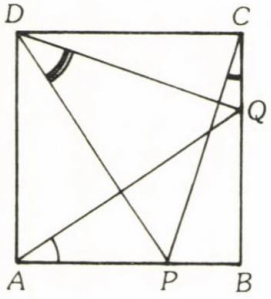
1. Egy szám 7-tel osztva 2-t, 8-cal osztva 4-et ad maradékul. Az első esetben a hányados 7-tel nagyobb, mint a második esetben. Melyik ez a szám? (8)

2. Szabályos hatszögben egy-egy csúcsot a szemköztes oldalak felezőpontjával az ábra szerint összekötünk. Igazold, hogy a vonalkázott terület egyenlő a pöttyözött területtel! (9)



3. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja P, BC oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja Q.

Mekkora az ábrán megjelölt szögek összege? (10)



4. Az A faluból egy gyalogos indul B faluba. Ugyanekkor B-ből egy kerékpáros indul A falu felé, majd odaérve, megállás nélkül visszaindul B-be. Először A-tól 2,5 km-re találkoznak, majd másodszor A-tól 5 km-re éri utól a kerékpáros a gyalogost. Milyen messze van a két falu egymástól? (11)

5. Az $\overline{abcd}$ (tízes számrendszerbeli) négyjegyű számról tudjuk, hogy

$$\overline{abc} + \overline{ab} + a = 219 \text{ és}$$

$$a + b + c + d = 21.$$

Melyik ez a négyjegyű szám? (12)

Bolyai János Matematikai Társulat
Országos Közoktatási Szolgálató Iroda

Országos verseny meghirdetése matematikából az általános iskolák 6-7. osztályos tanulói, valamint az azonos korú gimnazisták számára

A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) és az Országos Közoktatási Szolgáltató Iroda (OKSzI) – a Művelődési és Közoktatási Minisztérium (MKM) egyetértésével – 1993/94-ben országos versenyt indít matematikából az általános iskolák 6-7. osztályos korú tanulói számára.

A szakosított matematika tantervvel dolgozó általános iskolák, valamint az egyre szaporodó 6 és 8 osztályos gimnáziumok általában magasabb óraszámban tanítják a matematikát. Ennek megfelelően bizottságunk a 2. fordulótól két (I. és II.) kategóriában versenyezteti a tanulókat.

Azon 6., 7. és 8. osztályos tanulók – illetve a velük azonos korú gimnazisták –, akiknek heti kötelező óraszáma legfeljebb 4 óra I. kategóriások, a többiek II. kategóriások.

A versenyben való részvétel a tanulók számára önkéntes.

A verseny célja a matematikai tehetség korai felismerése és folyamatos gondozása, valamint csatlakozás a BJMT és az MKM szervezésében évtizedek óta jól működő versenyrendszerhez.

A verseny három fordulóból áll. Ezek: iskolai-, megyei-, országos szintű fordulók. A megyei és országos fordulókba csak a megfelelő teljesítményt nyújtók jutnak tovább.

I. Iskolai forduló

A tanulók iskolájukban az országos versenybizottság által kitűzött és a megyei megbízott által továbbított versenyfeladatokat oldanak meg azonos időpontban. A megye/fővárosi intézetek által kijelölt matematikai szakértők és a melléjük szervezett szakmai bizottság döntenek a II. fordulóba jutó versenyzőkről.

II. Megyei/fővárosi forduló

A most már 7., ill. 8. osztályos tanulók az országos versenybizottság által kitűzött és a megyei megbízottak által továbbított versenyfeladatokat oldanak meg a megye/főváros által meghatározott helyen/helyeken azonos időpontban. Az eredményes versenydolgozatokat a megyei/fővárosi megbízott szakértő továbbítja az országos versenybizottsághoz.

III. Országos forduló

Megyei/fővárosi versenyen legjobb eredményt elért tanulók számára az országos döntőt több nagyvárosban azonos időben rendezik, a versenydolgozatokat legkésőbb másnap a megbízott szakértők az országos bizottsághoz továbbítják.

A legjobb eredményt elérő tanulók és felkészítő tanáraik nevét, évfolyamonkénti bontásban, a Művelődési Közlöny ismerteti.

A versennyel kapcsolatos költségek – kivéve az országos versenybizottság kiadásait – a megyéket, ill. az iskolákat terhelik.

A verseny határidői

I. Iskolai forduló: 1993. április 20. (kedd), 14,00 - 16,00 óra.

A javítást a szaktanárok végzik, a legjobb eredményű dolgozatokat május 20-ig továbbítják a megyék által megbízott szakértőkhöz. A következő fordulón résztvevők számát, helyszínenkénti bontásban az országos versenybizottság címére: Bolyai János Matematikai Társulat (Budapest, Fő utca 68., 1027) 1993. szeptember 30-ig kell elküldeni.

A tanulók értesítéséről a megyei megbízottak intézkednek.

II. forduló: 1993. nov. 3. (szerda), 14,00 - 16,00 óra.

A javítást a megyei bizottságok végzik. Az eredményes dolgozatok beérkezési határideje az országos bizottság fenti címére: 1993. november 19.

III. forduló: 1994. január 11. (kedd) 14,00 - 16,00 óra.

A dolgozatokat legkésőbb a megírást követő napon kell a BJMT fenti címére elküldeni.

Budapest, 1992. XII. 14.

A
MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
KÖNYVAJÁNLATA

Kosztolányi - Mike - Vincze

Matematikai feladatsorozatok ált. iskolásoknak 5 – 6 – 7 – 8. osztály, valamint középiskolába készülőknek

Folytatva a sikeres „Jól felkészültem-e?" sorozatunkat, a biológia és a fizika után ezúttal matematikából. A kiadványok felölelik az általános iskolák felső tagozatának teljes tananyagát, valamint a sorozat ötödik kötete segítséget nyújt azoknak a tanulóknak, akik tanulmányaikat valamilyen középiskolában szeretnék folytatni. A feladatsorozatok változatos feladatokkal, kérdésekkel segítik elő a felkészülést, amelyekből a diákok lemérhetik, hogy menynyire sikerült az adott tananyagot elsajátítaniuk.

Megjelenés időpontja: 1993. augusztus
ára: 168,- Ft / kötet

Paál Györgyné

KÖNYVISMERTETÉS

Dávid Lajos: *BOLYAI Geometria az APPENDIX alapján*
Kiadta a Bolyai János Katonai Műszaki Főiskola, 192 oldal (1992.)

Bolyai János életéről, matematikai munkásságáról több könyv jelent már meg magyar nyelven, mégis Dávid Lajosnak a debreceni tudományegyetem egykori matematika professzorának (1881-1962) műve különleges helyet foglal el ezek között. A Bolyai János Katonai Műszaki Főiskola e könyv megjelentetésével a Bolyai irodalom régi hiányosságát szüntette meg. Magyar nyelven életrajz, emlékkönyv, facsimile már rendelkezésre áll, szakemberek számára íródott, egyetemi előadásokkal együtt használható tankönyv és jegyzet is van már Bolyai geometriájáról, de egy minden képzett gondolkodású ember számára érthető feldolgozás teljesen hiányzott. Ez a könyv 1944-ben Kolozsvárt szerencsétlen körülmények között elpusztult, csupán egy- egy példánya maradt fenn, úgyhogy ez még szakember számára sem volt elérhető.

Dávid Lajosnak ,,Bolyai geometria az Appendix alapján'' című könyve Bolyai János geometriai főművét az ,,Appendix''-et tárgyalja és széles olvasótábor számára teszi azt közkinccsé. Dávid Lajosnak a könyvhöz írt előszavából idézhetjük: *,,Mivel az Appendix rendkívüli tömörsége, tartalmának különössége miatt nehéz olvasmány, ezért megtartva negyvenhárom szakaszának sorrendjét az eredeti, általában nagyon tömör bizonyításain magyarázatokkal enyhítettem.''*

A könyv három fő részre tagolódik. Az I. rész ,,Alapvetés''. Ez bevezetésként szolgál ,,a legnagyobb magyar matematikus gondolatvilágába''. Tartalmazza a Bolyai geometria történeti előzményeit, valamely tudományos téma alaprendszerben történő felépítésének elvi problémáit és kimondja (gyakran részletes bizonyítás nélkül) a párhuzamosságtól független ,,abszolut geometria'' tételeket, amelyek sehol másutt nincsenek így összefoglalva és rendszerezve.

A II. részben található az ,,Appendix'' magyarázó feldolgozása az eredeti mű negyvenhárom paragrafusa alapján. A feldolgozásban a paragrafusok sorrendje és lényeges tartalma változatlan, de a szöveg eltér az eredeti tömör megfogalmazástól, lényegében mai magyar nyelven, szokásos jelölésekkel és ábrákkal történik a téma tárgyalása. Az egyes paragrafusokat szögletes zárójelben lévő számokkal jelzett további magyarázatok zárják, rávilágítva fontos összefüggésekre.

A III. részben, a Függelékben, a Bolyai geometriával kapcsolatos további matematikai témákról olvashatunk. *A)*-ban az alaprendszerekkel szemben támasztott követelmények elemzése található, *B)*-ben a Riemann geometria néhány tételét vázolja a szerző a Bolyai geometriával való összehasonlítás céljából. A *C)* pontban említést tesz a Bolyai geometria más lehetséges, az Appendix felépítésétől eltérő felépítéseiről. A *D)* pontban azt vizsgálja, hogyan várható annak megállapítása, hogy a valóságot melyik geometria írja le helyesen. Végül az *E)* pontban nagyon magvas, részletes áttekintést találunk a témára vonatkozó geometriai vizsgálatokról, mind a Bolyai előttiekről, mind pedig a Bolyai utániakról.

A könyvet az utalások felsorolása, majd egyedülállóan részletes irodalomjegyzék és tárgymutató zárja. Az eredeti forrásmunkák és a bennük szereplő fontosabb részletek pontos megjelölése a szakember számára is igen értékes segítséget nyújt.

Végül meg kell jegyezni, hogy mind a téma érdekessége, mind pedig annak közérthető tárgyalása miatt a könyv széleskörű olvasótáborra tarthat igényt és szólhat mindazokhoz, akik korszerű középfokú képesítéssel rendelkeznek és szeretnek matematikai problémákban elmélyedni.

Könyvajánlat

Kosztolányi József - Mike János - Vincze István

Érdekes matematikai feladatok

A feladatgyűjtemény elsősorban a felső tagozatos és a középiskola elsős, illetve másodikos tanulói számára készült. A témakörök a hagyományos elemi matematika területei mellett (algebra, geometria) számos olyan érdekes és gondolkodtató matematikai problémát is tartalmaznak, amelyek megoldásához a logikus gondolkodáson kívül szinte más nem is igen szükséges.

A feladatgyűjtemény alapjául a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium Matematika Iskola néven közismertté vált kísérleti munkája szolgált.

3. kiadás 240,- Ft

Bonifert Domonkos

Néhány tipikus problémaszituáció matematikából
Feladatok és megoldások érdeklődő diákoknak és tanároknak

Az olvasó olyan példatárat vehet a kezébe, amelyben a feladatok nem a megszokott témakörök, hanem megoldási eljárások szerinti csoportosításban találhatók. A fejezetcímek:

I. Függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek
II. Bizonyítások
III. Szélsőérték-feladatok
IV. Van olyan? Számlálási technikák
V. Egyéb érdekességek

A kötet sajátossága, hogy ugyanazon probléma megoldását többféle módszerrel, más-más szintű megközelítésben, az ötletek sokaságának felhasználásával mutatja be. A feladatok tanulmányozása, feldolgozása tehetséges általános és középiskolai tanulók, valamint az őket tanító tanárok számára is hasznos lehet.

1. kiadás 345,- Ft

Hajnal Imre

Középiskolások kézikönyve
Matematikai fogalmak, tételek

A könyvben összefoglalva és rendszerezve található a középiskolai matematika elméleti tananyaga. Ezzel segítséget nyújt az érettségi vizsgára, főiskolai, egyetemi tanulmányokra készülőknek.

Ajánljuk ezt a könyvet mindazoknak, akik a matematikai fogalmak, definíciók, állítások, tételek közötti logikai rend alapos ismeretére és jól alkalmazható szilárd tudásra törekednek, olyanra, amely biztosíthatja a jó eredményű érettségi vagy a sikeres felvételi vizsgájukat.

2. kiadás 318,- Ft

imosoft

MŰZAK

A matematika TANÍTÁSA

. MÁRCIUS ára: 86,- Ft I. évf. / 2. szám

VERSECHY KÖNYVTÁR SZOLNOK

TARTALOM

A HOLLAND MATEMATIKATANÍTÁSI REFORM NÉHÁNY ELVE
Dr. Ambrus András, ELTE, Budapest
Dr. Joster Pelle, SLO, Enshede

A HÁROMSZÖG EGY NEVEZETES VONALÁRÓL
Dr. Gerőcs László
vezető tanár, Budapest

AZ ELSŐÉVES MŰSZAKI FŐISKOLAI HALLGATÓK FÜGGVÉNYTANI ISMERETEIRŐL
Vígné dr. Lencsés Ágnes
főiskolai adjunktus
Pollack Mihály Műszaki Főiskola

BESZÁMOLÓ VERSENYEKRŐL
Bolyai János Matematikai Társulat

KÖNYVISMERTETÉS
Sharnitzky Viktor
főiskolai tanár, Budapest

A holland kísérlet alapelve, hogy az alapkészségeket ne izoláltan, hanem a tanulók számára ismerős problémaszituációkba helyezve aktualizálja. Ezzel kapcsolatban Freudenthal többször is hangsúlyozta, hogy például nem szabad ún. „csupasz" osztási feladatokat kitűzni, hanem ... *(6. oldal)*

A háromszög nevezetes vonalainak és pontjainak tanítása során – sok középiskolai matematikatanár szívfájdalma – sajnos már egyáltalán nem, vagy csak nagyon kevés idő jut az izgalmasabb nevezetes vonalak és pontok vizsgálatára. Pedig az Euler-egyenes, a Fauerbach-kör, a ... *(8. oldal)*

Több éves oktatói munkám során állandóan tapasztalnom kellett a felsőoktatásba kerülő hallgatók beilleszkedési problémáit. Ezen hallgatói gondok még jobb képességűek esetén is gyengébb tanulmányi eredményekhez vezettek, és sok volt a lemorzsolódás is. Az utóbbi évek ... *(12. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Olvasószerkesztő: Földvári Erika
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 430 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Hirdetésekkel kapcsolatos
felvilágosítás:Tóth Mónika
Tel.: (62) 312-988

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

A HOLLAND MATEMATIKATANÍTÁSI REFORM NÉHÁNY ELVE
Dr. Ambrus András, ELTE, Budapest
Dr. Joster Pelle, SLO, Enshede

A HÁROMSZÖG EGY NEVEZETES VONALÁRÓL
Dr. Gerőcs László
vezető tanár, Budapest

AZ ELSŐÉVES MŰSZAKI FŐISKOLAI HALLGATÓK FÜGGVÉNYTANI ISMERETEIRŐL
Vígné dr. Lencsés Ágnes
főiskolai adjunktus
Pollack Mihály Műszaki Főiskola

VERSENYEKRŐL

KÖNYVISMERTETÉS
Sharnitzky Viktor
főiskolai tanár, Budapest

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 10-12 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

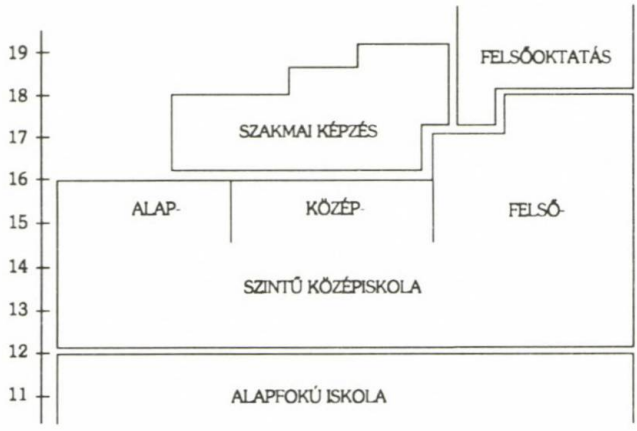
Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat.

Dr. Ambrus András - Dr. Joster Pelle:

A holland matematikatanítási reform néhány elve

Az Enschedei Tantervfejlesztő Intézet dolgozóiból (National Institute for Curriculum Development The Netherlands- SLO) és az Utrechti Egyetem oktatóiból alkotott csoport irányításával 1987 óta új matematikatanítási reformkísérlet folyik Hollandiában a 12-16 éves korosztály számára. A holland iskolarendszer vázlata:



Néhány megjegyzés: az alapfokú iskolai osztályokban a készségtárgyak kivételével a többi tantárgyat egy tanár tanítja, azaz nincs a 7. osztály előtt szaktanár által irányított matematikaoktatás. A középiskola három különböző irányt tartalmaz: alsó, közép és felső szint. Az egyes szintekről vizsgák segítségével lehet átlépni magasabb szintre. A kísérlet jelenlegi állása szerint az első két évben azonos matematika tanterv szerint tanulnak a diákok (7-8. osztály), de a felsőszintű osztályokban nagyobb mélységben.

Az alábbiakban a fenti matematikatanítási kísérlet néhány alapelvét mutatjuk be. Ezzel kapcsolatban a következő didaktikai problémák merülnek föl: mennyire globálisan ill. speciálisan, mennyire absztrakt ill. konkrét szinten, mennyire teljességében, mily mértékben gyakorlati ill. elméleti vonatkozásaiban mutassuk be a főbb jellegzetességeket. Végül is néhány gyakorlati példa segítségével mutatjuk be a főbb jellemzőket; az ezek alapján levonható általánosításokat, elméletalkotást, absztrakciót az olvasóra bízzuk.

A kísérlet jellegzetességeinek kidomborítása végett egy budapesti általános iskolai 6. osztályban három - a holland kísérleti anyagból vett - feladat megoldását kísértük figyelemmel. Emellett az ELTE egy matematika-fizikaszakos hallgatói csoportja részére „holland mintájú" matematika-didaktikai szemináriumot szerveztünk, főként azzal a céllal, hogy a holland matematikatanítási reform néhány markáns vonását kiemeljük, és a magyar hallgatók reagálásait megfigyeljük.

Cikkünkben három kérdést vizsgálunk meg:
1. A matematikai tananyag és kiválasztásának főbb kritériumai.
2. Egy matematikaóra tapasztalatai.
3. Egy matematika-didaktikai szeminárium tapasztalatai.

1. A matematika tananyag és kiválasztásának kritériumai

Először is bemutatunk egy jellegzetes példát a kísérleti anyagból. A holland napilapok minden évben beszámolnak az országban rendezett hagyományos nemzetközi jégkorongtornáról. A kísérleti anyagban igyek-

szünk valódi, friss, autentikus anyagokra támaszkodni. A magyar olvasók jobb motiválása és a jobb megértés kedvéért az eredeti holland szövegen két változtatást eszközöltünk: jégkorong helyett futball szerepel, Nagy-Britanniát Magyarországra cseréltük föl.

„Keddi újságrészlet:

Eredmények:

Pakisztán-Spanyolország	3 : 2
Ausztrália-Magyarország	4 : 3
Hollandia-Új Zeland	2 : 1

Állás:

1. Pakisztán	2	4	8:3
2. Ausztrália	2	4	6:3
3. Magyaro.	2	2	6:5
4. Hollandia	2	2	2:3
5. Spanyolo.	2	0	3:6
6. Új Zeland	2	0	2:7

Kérdések:

1. Mi történt az első fordulóban? Ki ki ellen játszott, és mi volt az eredmény?
2. Meg tudod jósolni a harmadik forduló párosítását?

"Hétfői újság:

Eredmények:

Pakisztán-Hollandia	2:2
Ausztrália-Új Zeland	2:2

Állás:

1. Ausztrália	4	7	10:6
2. Pakisztán	3	5	10:5
3. Magyaro.	3	4	9:6
4. Hollandia	3	3	4:4
5. Új Zeland	4	1	5:12
6. Spanyolo.	3	0	4:8

Kérdések:

3. Meg tudod jósolni a hátralevő programot?
4. Végezhet Magyarország az utolsó helyen?
5. Megnyerheti Magyarország a tornát?

A kérdések nehezebbek annál, mint amennyire első látásra tűnnek. Különösen a 3. kérdés. Példánk jól illusztrálja, mit értünk a „matematika erején". A megadott adatokból egy kis aritmetika és kombinatorika segítségével meghatározható, mi történt eddig a tornán. Bizonyos mértékben a program hátralevő részét is meg tudjuk határozni. A tanulók a feladat megoldása révén megtapasztalják, milyen hatékony eszköz lehet a matematika. Segítségével számunkra addig ismeretlen tényekhez juthatunk. Példánk alapján kimondhatjuk a tananyagkiválasztás egyik általános kritériumát:

K-1: A tanulóknak reális képet kell kapniuk a saját matematikatanulási és matematikaalkalmazási képességeikről.

Ehhez szorosan kapcsolódó kritérium:

K-2: A fenti képességeknek megfelelően a tanulóknak együtt kell dolgozniuk társaikkal (Kooperatív munka).

Mindezek alapján a tananyagnak
- motiválónak kell lennie és változatos problémákat kell tartalmaznia,
- lehetőséget kell biztosítania a különböző szintű tanulói megnyilvánulásokra,
- provokálnia kell a reflektív gondolkodást és a nyitott diszkussziókat,
- nem szabad túlzottan strukturáltnak, illetve agyonmetodologizáltnak lennie.

K-3: A felhasznált szituációknak *ismerősnek és felfoghatóknak* kell lenniök a tanulók számára. Más szóval: a matematika anyagnak *realisztikusnak* kell lennie és lehetőleg kapcsolódnia kell a *tanulók tapasztalataihoz, gondolataihoz*. Lehetőleg, hiszen legalább két kivétel van:

a) Egy bizonyos idő után a matematikai objektumok hozzátartoznak a tanulók tapasztalataihoz, gondolataihoz.
b) A tanulói fantázia is ismerős és felfogható lehet.

A *felfoghatóság (érthetőség)* kritériuma abból a pedagógiai alapelvből származik, hogy nem szabad olyan dolgokkal foglalkoztatni a tanulókat, melyeknek nincs értelme számukra, amit nem értenek. Fontos pszichológiai alapelv: a tanulók jobb és mélyebb megértéshez jutnak, ha látják az illető anyag értelmét.

K-4: A kiválasztott szituációk célja a *tanulók motiválása az aktív problémamegoldásra*. A

matematikát nem mint tudományos diszciplinát, hanem mint humán tevékenységet kell tekinteni az oktatásban (Freudenthal). Ez az aktivitás a szituációk és a bennük levő matematikai tartalom viszonyának kutatásából ered.

Fontos megjegyzések:

- Egy problémának többféle szintű és különböző módú megoldása lehet.
- Előfordulhat, hogy több helyes válasz is lehetséges.
- Természetesen fenti példánk több szempontból is nem elegendő.
- A mindenki számára kötelező, a felnőtt életre való előkészítést szolgáló matematikaanyagból vettük. A tanulók egy részét fel kell készíteni a felsőfokú tanulmányaikra is. E tanulók tanterve lényegesen igényesebb.
- A probléma feldolgozása kooperatív munkában, kis heterogén csoportban történt, ami nem domináns módja a matematikaoktatásnak.
- Választott témánk aritmetikai. Az új tanterv további témakörei: grafikonok, függvények, algebra, geometria, statisztika, valószínűségszámítás és diszkrét matematika.
- Ez a példa egyedül semmit sem mutat meg az ún. hosszútávú tanulási folyamatból. A matematika tananyagot mint egészet úgy kell összeállítani, hogy lehetővé tegye az effajta tanulási folyamatot is. Például az ,,arány'' előfordul a 4 évesektől 18 évesekig terjedő minden korosztály tantervében. Ez a megjegyzés elvezet a következő nyilvánvaló kritériumhoz:

K-5: A 12-16 évesek matematika-tantervét össze kell kapcsolni az alapiskola illetve a későbbi képzés matematikai tanterveivel. Hollandiában az elmúlt évtizedben jelentős alapiskolai matematikatanítási reform ment végbe, melynek fő jellemzője a realisztikus matematikaoktatás.

A középszintű iskola utáni képzésben három irányt különböztethetünk meg:

- *Alsószintű irányzat:* kismértékben vagy egyáltalán nincs további képzés. Fő cél a felnőtt életre való felkészítés.
- *Középszint:* a további szakmai életre készít föl. (Az 1968-as ,,Új Matematika'' tanterv még mindig hat!)
- *Felsőszint:* a felsőfokú tanulmányokra készít föl. E szinten is a realisztikus matematikatanítás a jellemző.

Összefoglalva a tananyagkiválasztás kritériumait, elmondhatjuk:

A matematika-tananyagnak hasznosnak és értelmesnek kell lennie

- a tanuló,
- a későbbi iskolafokozatok,
- a felnőtt élet,
- a későbbi hivatás számára.

Ha mindezen szempontok teljesülnek, akkor hasznos és értékes lesz a társadalom számára is.

2. Egy tanítási óra tapasztalatai

A Budapesti Radnóti Miklós Gyakorlóiskola egyik 6. osztályában Kiss Lászlóné vezetőtanár vezetésével a következő problémák tanulói megoldásait kísértük figyelemmel:

1. András százezer óra idős. Lehetne osztálytársatok?
2. Nagyapa órájának nagymutatója elveszett. Meg tudod állapítani, hogy mennyi az idő az óra szerint?

3. Meg tudod mondani, hány fehér illetve fekete mező van a futball-labdán?

A feladatok feldolgozása csoportmunkában történt, két ötös és négy négyes – vegyes képességű tanulókból álló – csoportot állított össze a tanárnő az egyébként átlagos képességű tanulókból.

Az óra a következőképpen folyt le:

Minden csoport egy-egy feladatlapot kapott, az egyes csoportok tanulói közösen oldhatták meg az egyes problémákat. A feldolgozás szerkezete minden feladatnál a következő volt:

1. Bevezetés, a feladat megértése tanári irányítással.
2. Önálló csoportmunka.
   A tanár megfigyel, hallgat, közvetett módon – kérdésekkel – segít.
3. A megoldás megvitatása. A csoportok egy-egy tanulója ismerteti a megoldást. A tanár kiegészít, értékel, összefoglalja az elfőforduló megoldásokat.

Tapasztalatok:

Az első feladatot segítség nélkül minden csoport meg tudta oldani. Minden csoport pontosan kiszámolta, hány éves András. Két mód fordult lényegében elő: $10^5 : (365 \cdot 24)$ ill. $(10^5 : 24) : 365$, amelyek valójában nem lényegesen térnek el egymástól. Egyik csoport sem alkalmazott becslést, közelítő számítást, holott a kérdésfeltevés megengedte volna azt, nem kívánt precíz végeredményt.

A második feladat lényegesen több gondot okozott. A problémafölvetés szokatlannak bizonyult a tanulók számára. Olyan külső dolog is zavarta őket, hogy az ábrán túl hosszúnak találták a kismutatót. Többen mondták, ,,ez nagymutató, hiszen olyan hosszú!'' Sokan nem látták az elején, hogy mire kell a szögmérő. Alapvető nehézséget okozott, hogy eddig csak olyan szögek mérésével találkoztak, amelyek mindkét szára meg volt rajzolva az ábrán. E feladatnál előbb be kellett húzni a ,,másik'' szárat.

Végül is több tanári segítséggel a legtöbb csoport eljutott a megoldásig. Érdekes volt megfigyelni a sokféle vitát az egyes csoportokon belül, a különféle javaslatokat ill. azok elvetését vagy elfogadását. A probléma fölkeltette a tanulók érdeklődését.

A harmadik feladat megoldására nem maradt elegendő idő, öt percet foglalkozhattak vele a tanulók. Ez a probléma annyira érdekelte a tanulók többségét, hogy a szünetben is foglalkoztak vele, többen ,,megvitatták'' a tanárnővel megoldásukat. Néhány tanuló a rövid idő ellenére is megtalálta a helyes megoldást.

Összegzés

A diákok számára eleinte szokatlan volt a csoportmunka – a hagyományos osztálytermekben padok vannak, lehetetlen a megszervezése. Végül is hamar ,,átálltak'' e munkaformára. Igaz, hogy a szokottnál egy kissé zajosabbak voltak, de ez megengedhető ,,munkazaj'' volt csupán. A feladatok motiválóak voltak a tanulók számára, főleg a harmadik.

A holland kísérlet alapelve, hogy az alapkészségeket ne izoláltan, hanem a tanulók számára ismerős problémaszituációkba helyezve aktualizálja. Ezzel kapcsolatban Freudenthal többször is hangsúlyozta, hogy például nem szabad ún. ,,csupasz'' osztási feladatokat kitűzni, hanem minden esetben bizonyos kontextusba helyezve kell gyakoroltatni az írásbeli osztást (szöveges feladat). A második feladat is jó példa a szögmérés, szögfogalom ill. arányok nem mechanikus alkalmazására. A harmadik feladat a tanulók térszemléletének a fejlesztését kívánja szolgálni.

3. Tanárképzés, tanártovábbképzés

A kísérleti anyagok megismertetése céljából tanártovábbképzési kurzusokat tartanak Enschedeben. E kurzusok szerkezetét szeretnénk a következő példával illusztrálni. Az ELTE egyik IV. éves matematika-fizika szakos hallgatói csoportjával próbáltuk ki az egyik foglalkozás anyagát.

A hatodik osztályban kitűzött egyik feladat megvitatása szerepelt kisebb módosítással: ,,András százezer óra idős. Lehetséges, hogy hatodik osztályba jár?''

A foglalkozás fő célja az volt, hogy a tanárszakos hallgatók tapasztalatokat szerezzenek a tanulási folyamat megfigyelésében és elemzésében, belássák ezek hasznát és következtetéseket vonjanak le a saját tanítási gyakorlatukra vonatkozólag.

Első lépésként a hallgatók megoldották a feladatot. Bevezetésként tehát a tanítási anyagra koncentráltunk. Milyen matematikai ismeretek, készségek szükségesek a feladat megoldásához?

A következőkben a hallgatók arról formáltak véleményt, hogy szerintük hogyan oldaná meg a feladatot egy jó képességű illetve egy gyenge tanuló. A figyelem áttevődött a *matematikatanulási folyamatra*. A hallgatói elképzeléseket egybevetettük konkrét tanulói megoldásokkal, két holland tanuló megoldása szerepelt a feladatlapon. A tanártovábbképzési kurzusokon alkalmazott tanulói interjúk egyértelmű tanulsága, hogy a tanulók gyakran jelentős mértékben eltérnek attól, amit a tanáruk vár megoldásként tőlük. Itt nem csak a hibás megoldásokra gondolunk, hanem sokszor meglepő, váratlan ötletekkel is találkozhatunk. A tanulói megoldások elemzése alapján a hallgatók (tanárok) képet kapnak az aktuális tanulási folyamatról. Ezek alapján tudnak dönteni az adott konkrét helyzetben szükséges tanári segítségről (magyarázatok, hibák kijavítása, stb.). Ezzel eljutottunk a harmadik fő fázishoz: hogyan tanítanák az egyes tanárjelöltek (tanárok) a konkrét tanítási egységet. A figyelem a *matematika tanítására* tevődik át. A kurzusokon célszerű felhasználni a résztvevők által készített tanulói interjúkat.

Utolsó fázis a különböző nézetek, felfogások szembevetése egymással. A továbbképzési alkalmakon rendre élénk viták folynak, a résztvevők általában pozitívan állnak hozzá saját addigi felfogásuk módosításához.

A szeminárium néhány tapasztalata:

Amint az várható volt, a szemináriumon nem voltak olyan élénk viták, mint az a hollandiai tanártovábbképzési kurzusokon tapasztalható, hiszen a IV. éves egyetemi hallgatóknak még nincs olyan sok tanítási tapasztalata, mint a gyakorló tanároknak.

Tanulságok:

1. A magyar hallgatók döntő többsége nem használt becslést, közelítő értékekkel való számolást, holott a probléma megoldásához elegendő lett volna. Két hallgató kivételével mindenki több tizedesjegyre kiszámította András életkorát. A módszertani képzés keretében nagyobb súlyt kell helyezni erre a problémára, különben a leendő tanárok későbbi tanítási gyakorlatukban e kérdéseket mellékesnek fogják tartani.
2. A hallgatók többsége a szemináriumon bemutatott tanítási módot túlzottan lassúnak, időigényesnek találta. ,,Sok mindent meg kell tanítani, nincs idő arra, hogy egy ilyen egyszerű feladattal olyan sokat foglalkozzunk.''
3. A hallgatók többsége csoportmunka-ellenes volt. ,,A csoportmunka nem hasznos a gyenge tanulók számára. Több eredményt érhetünk el, ha direktebb tanári irányítással dolgozunk velük.''

Összegzés:

A 6. osztályos matematikaóra és az egyetemi szeminárium világosan megmutatta, hogy célszerű más országok tapasztalatait is megismerni, azok fő elvei termékenyítően hathatnak a hazai matematikaoktatásra is. Ilyen szempontból úgy érezzük, hogy a nemrég megkezdődött magyar-holland munkakapcsolat fontos lépés ez irányban.

Dr. Gerőcs László

A háromszög egy nevezetes vonaláról

A háromszög nevezetes vonalainak és pontjainak tanítása során – sok középiskolai matematikatanár szívfájdalma – sajnos már egyáltalán nem, vagy csak nagyon kevés idő jut az izgalmasabb nevezetes vonalak és pontok vizsgálatára. Pedig az Euler-egyenes, a Fauerbach-kör, a Simpson-egyenes, a talpponti háromszög (és sorolhatnánk tovább) ragyogó területet nyújtanak a diákok fantáziájának, kreativitásának, geometriai szemléletének fejlesztéséhez. Talán csak matematikaszakkörökön nyílik mód arra, hogy az elemi geometria e szép és igen hasznos fejezeteit részletesebben taglaljuk és próbáljunk újabb érdekességeket „felfedeztetni" és általánosítani.

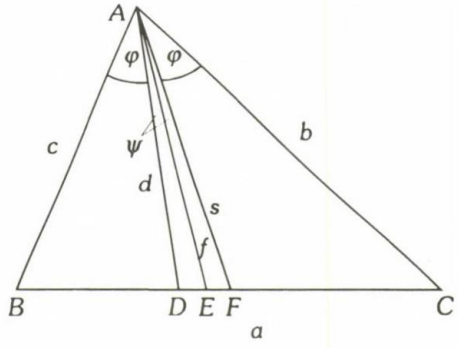
Jelen cikkünkben a hegyesszögű háromszög egy igen érdekes és kevésbé ismert nevezetes vonalával, a „szimediánnal" fogunk megismerkedni. Összefoglaljuk néhány tulajdonságát, majd megvizsgáljuk, hogy ha a szimedián származtatásának módját a háromszög magasságára alkalmazzuk, milyen – már egyáltalán nem meglepő – eredményre jutunk.

Mindenekelőtt definiáljuk a háromszög szimediánját; megmutatjuk, hogy a háromszög szimediánjai egy pontban metszik egymást; megvizsgáljuk, hogy e nevezetes vonalak milyen kapcsolatban állnak a háromszög talpponti háromszögével, majd megadjuk e vonalaknak a háromszög oldalaival kifejezett hosszát.

Definíció: A hegyesszögű háromszög egy szimediánja valamely súlyvonalnak a vele azonos csúcsból induló szögfelezőre vonatkozó tükörképe.

Legelőször vizsgáljuk meg, hogy a háromszög egy szimediánja milyen arányban osztja két részre a háromszög szemközti oldalát.

Legyen a BC oldal felezőpontja F, az A csúcsból induló szögfelező talppontja E, a szimedián talppontja a BC oldalon D. (ld. 1. ábra). A definíciónak nyilvánvaló következménye, hogy $DAB\sphericalangle = CAF\sphericalangle$ és $DAE\sphericalangle = EAF\sphericalangle$.



1. ábra

Célunk tehát a $\frac{BD}{DC}$ arány meghatározása. A háromszög trigonometrikus területképletét felhasználva:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{t_{BDA}}{t_{DCA}} = \frac{cd \sin \varphi}{bd \sin (\varphi + 2\psi)}$$

Bővítsük most a kapott egyenlőség jobb oldalát $c \cdot s \cdot b$-vel:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c^2 sb \sin \varphi}{b^2 sc \sin (\varphi + 2\psi)} = \frac{c^2 \cdot t_{FCA}}{b^2 \cdot t_{BFA}}$$

Mivel $BF = FC$, ezért $t_{FCA} = t_{BFA}$, így kaptuk:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{b^2}$$

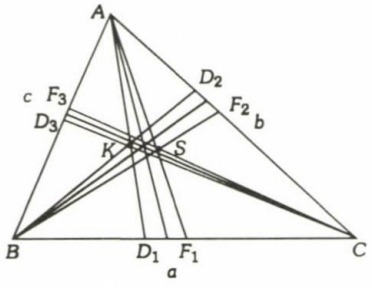
Tekintsük most a 2. ábrát, melyen a háromszög mindhárom szimediánját feltüntettük; ezek talppontjai rendre D_1, D_2, D_3. Az előző eredményt felhasználva:

$$\frac{BD_1}{D_1C} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{CD_2}{D_2A} = \frac{a^2}{c^2} \text{ és}$$

$$\frac{AD_3}{D_3B} = \frac{b^2}{a^2}$$

A kapott egyenlőségeket összeszorozva:

$$\frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{CD_2}{D_2A} \cdot \frac{AD_3}{D_3B} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1$$

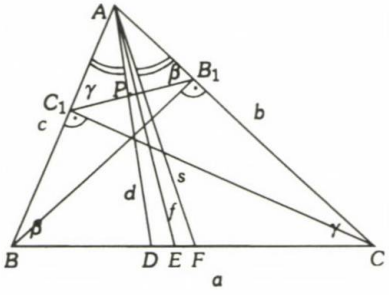


2. ábra

Így a CEVA-tétel szerint kimondhatjuk a következőket:

1. Tétel: A hegyesszögű, háromszög szimediánjai egy pontban metszik egymást.

A következőkben azt fogjuk megvizsgálni, milyen kapcsolatban áll a hegyesszögű háromszög szimediánja a háromszög talpponti háromszögével.



3. ábra

2. Tétel: A hegyesszögű háromszög valamely csúcsából induló szimediánja felezi a másik két csúcsból induló magasságok talppontjait összekötő szakaszt.

A 3. ábra jelöléseit használjuk. Mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy BCB_1C_1 négyszög húrnégyszög, így $C_1B_1A\sphericalangle = \beta$ és $B_1C_1A\sphericalangle = \gamma$.

Ekkor viszont $C_1B_1A_\triangle \sim ABC_\triangle$, azaz

$$(1) \qquad \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$$

De $C_1AP_\triangle \sim AFC_\triangle$, így

$$(2) \qquad \frac{AC_1}{C_1P} = \frac{AC}{FC}$$

és $APB_{1\triangle} \sim ABF_\triangle$, ezért

$$(3) \qquad \frac{AB_1}{B_1P} = \frac{AB}{BF}.$$

(2-ből) $C_1P = \dfrac{AC_1 \cdot FC}{AC}$,

(3-ból) $B_1P = \dfrac{AB_1 \cdot BF}{AB}$

Innen $\dfrac{C_1P}{B_1P} = \dfrac{AC_1 \cdot FC}{AC} \cdot \dfrac{AB}{AB_1 \cdot BF}$. De

$BF = FC$-t és (1)-t felhasználva $\dfrac{C_1P}{B_1P} = 1$, azaz $C_1P = B_1P$, tehát a szimedián felezi a C_1B_1 szakaszt.

Végezetül fejezzük ki a szimedián hosszát a háromszög oldalaival. Írjuk fel a 3. ábra BDA háromszögére a cosinus-tételt. Mivel az 1. tétel szerint

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{b^2}, \text{ ezért } BD = \frac{c^2a}{b^2 + c^2}. \text{ Ekkor}$$

$$d^2 = c^2 + \left(\frac{c^2a}{b^2 + c^2}\right)^2 - 2c \cdot \frac{c^2a}{b^2 + c^2} \cdot \cos\beta,$$

de $\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, így

$$d^2 = c^2 + \frac{c^4a^2}{\left(b^2 + c^2\right)^2} - \frac{2c^3a}{b^2 + c^2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$d^2 =$$

$$= \frac{c^2(b^2 + c^2)^2 + c^4a^2 - c^2(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2)^2}$$

$$d^2 = \frac{c^2[(b^2 + c^2)(2b^2 - a^2) + c^2a^2]}{(b^2 + c^2)^2}$$

$$d^2 = \frac{c^2(2b^4 + 2b^2c^2 - b^2a^2 - c^2a^2 + c^2a^2)}{(b^2 + c^2)^2}$$

$$d^2 = \frac{c^2b^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)^2}$$

Felhasználva, hogy a háromszög A csúcsából induló súlyvonalának hosszára

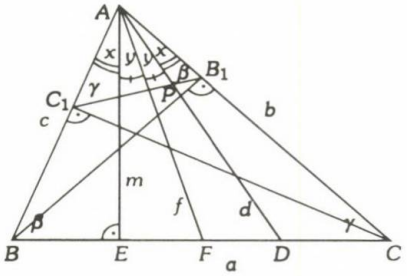
$$s_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

kapjuk az A csúcsból induló szimedián hosszának végső alakját:

$$d = \frac{2s_acb}{b^2 + c^2}$$

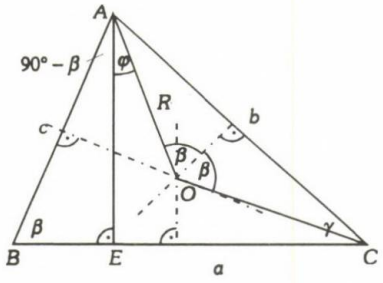
Azt a tényt, hogy a háromszög szimediánjai egy pontban metszik egymást, egymástól függetlenül több matematikus is fölfedezte. Így pl. E. Grabe 1847-ben, E. Catalan 1852-ben. 1873-ban Lemoine egy dolgozatában a metszéspont több érdekes tulajdonságára mutatott rá; emlékére a szimediánok metszéspontját szokás a háromszög Lemoine-féle pontjának nevezni.

Ezek után első meggondolásra érdemesnek tűnik ugyanazt a tükrözést elvégezni a hegyesszögű háromszög magasságával is, mint amit a szimedián származtatásakor a súlyvonallal tettünk. Valóban, ha a háromszög magasságait tükrözzük az azonos csúcsból induló szögfelezőkre, akkor az így kapott egyenesek ugyancsak egy pontban metszik egymást, mégpedig a háromszög köré írható körének a középpontjában.



4. ábra

Tekintsük ugyanis a 4. ábrát. Jelölje E az A-ból induló magasság, F a szögfelező, D pedig a magasságnak a szögfelezőre vonatkozó tükörképe talppontjait. A BEA háromszögből $x = 90° - \beta$, AEC háromszögből $x + 2y = 90° - \gamma$, így m és d hajlásszöge $2y = \beta - \gamma$. Most tekintsük az 5. ábrát, ahol az A csúcsból induló magasság és az A csúcsba futó sugár szögét φ-vel jelöltük. Mivel AOC középponti szög, ezért $AOC\sphericalangle = 2\beta$, vagyis $OAC\sphericalangle = 90° - \beta$. Így $\varphi = \alpha - 2(90° - \beta) = \alpha + 2\beta - 180° = \alpha + 2\beta - \alpha - \beta - \gamma = \beta - \gamma$, azaz $\varphi = 2y$. Azt kaptuk tehát, hogy a magasság szögfelezőre vonatkozó tükörképe illeszkedik a háromszög kérdéses csúcsába futó sugárra, így nyilvánvaló, hogy egy pontban metszik egymást, ugyanúgy, mint a súlyvonalaknak a megfelelő szögfelezőkre vonatkozó tükörképei.



5. ábra

Végezetül nézzük még egyszer a 4. ábrát.

Mivel BCB_1C_1 húrnégyszög, ezért $C_1B_1A_\triangle \sim$ $\sim ABC_\triangle$. De $APB_{1\triangle} \sim BEA_\triangle$, ezért az ABC háromszög m magasságának a szögfelezőre vonatkozó d tükörképe C_1B_1A háromszögben magasság. Ha ezt most összevetjük a szimediánnal kapcsolatban mondottakkal (ld. 2. tétel, 3. ábra), megállapíthatjuk a következőket:

Ha a háromszög súlyvonalát tükrözzük a vele azonos csúcsból induló szögfelezőre, akkor a kapott szimedián ugyanúgy súlyvonal lesz a B_1C_1A háromszögben, mint ,,őse'' (t.i. az eredeti súlyvonal) ABC-ben, ha pedig a magasságot tükrözzük a megfelelő szögfelezőre, a tükörkép ugyanolyan szerepet játszik B_1C_1A-ban (t.i. magasság), mint ,,őse'' az ABC háromszögben.

Könyvismertető

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából 10-14 éveseknek

Az utóbbi évek módszertani kísérletei, az iskolaszerkezet változatosabbá válása és a Nemzeti Alaptanterv kerettanterv jellege szükségszerűen maguk után vonják a matematika tanításának egyre sokszínűbbé válását mind tartalmi, mind strukturális, mind pedig módszertani szempontból a címben jelzett korosztály vonatkozásában is. Jelzik ezt az egyre inkább szaporodó kísérleti osztályok, valamint az új tankönyvcsaládok és feladatgyűjtemények megjelenése a tankönyvpiacon.

Munkaközösségünk egy olyan feladatgyűjtemény összeállítását tűzte ki célul, amelyet a tanulók, és az őket tanító pedagógusok minden iskolatípusban (az alkalmazott tantervtől függetlenül), és a tanítási-tanulási folyamat valamennyi fázisában jól tudnak használni. Ennek megfelelően a feladatokat témakörök szerint csoportosítottuk, nem pedig az egyes évfolyamok tananyaga alapján. Az egyes tematikus csoportokon belül az anyagrészeket ,,felvezető'', a tanult módszereket, ismereteket elmélyítő feladatok mellett találhatók olyanok is, amelyek nehezebbek, a tanulóktól megkövetelik az ismeretek alkotó alkalmazását.

A feladatgyűjtemény nem tartalmazza a feladatok megoldását, így ellenőrzésre, közvetlen iskolai számonkérésre is jól használható. A feladatok nagy száma (3200) és változatossága lehetővé teszi, hogy a pedagógus a tanulók képességeinek, tudásszintjének, érdeklődésének, és természetesen a saját szakmai ,,ízlésének'' megfelelően válogasson feladatokat a gyerekek iskolai és otthoni munkájához.

A feladatgyűjtemény főbb fejezetei:

Műveletek természetes számokkal
Műveletek egész számokkal
Műveletek törtszámokkal
Hatványozás
Műveletek tizedes törtekkel
Nagy és kicsi számok írása, normálalak
Műveletek algebrai kifejezésekkel
Egyenletek
Egyenletrendszerek
Egyenlőtlenségek
Egyenlettel, egyenlőtlenséggel megoldható szöveges feladatok
Függvények, sorozatok
Oszthatóság, számrendszerek
Geometria
Kombinatorika

A felsorolt fejezeteken belül a feladatokat tovább már nem bontottuk, de törekedtünk arra, hogy az összekapcsolódó feladatok megfelelő didaktikai és tematikus rendben kövessék egymást.

Reméljük, hogy az érintettek haszonnal forgatják majd ezt a kötetet, és mindazok a célok, amelyek bennünket vezéreltek, a tanítási gyakorlatban valóra válnak.

Megjelenik: 1993. május, ára: 298,- Ft

Kiadó: MOZAIK Oktatási Stúdió

Vígné dr. Lencsés Ágnes

Az elsőéves műszaki főiskolai hallgatók függvénytani ismereteiről

(Visszajelzés középiskolában tanító kollégák részére)

Több éves oktatói munkám során állandóan tapasztalnom kellett a felsőoktatásba kerülő hallgatók beilleszkedési problémáit. Ezen hallgatói gondok még jobb képességűek esetén is gyengébb tanulmányi eredményekhez vezettek, és sok volt a lemorzsolódás is. Az utóbbi évek e tárgykörben megjelent egyre szaporodó számú irodalma is bizonyítja, hogy általánosan ismertté vált, és a figyelem középpontjába került a középiskolai tanítás és a felsőfokú oktatás közötti nagy eltérés.

Munkám során megkíséreltem feltárni a középiskolai és a főiskolai oktatás különbségeit – képzési célok, a tananyag tartalma, az ismeretfeldolgozás módszerei, a tanulásirányítás folyamata, az ellenőrzés-értékelés területein –, tehát a fent említett probléma okait. Ezen elemző munkát követően olyan oktatási kísérletet dolgoztam ki, melynek többszöri végrehajtása és eredményeinek tudományos elemzése igazolja, hogy a felsőoktatás igen sokat tehet a kétféle oktatási forma közti átmenet problémáinak enyhítése és megoldása érdekében a matematika oktatásában. A tapasztalatok egy része más diszciplinák tanításában is hasznosítható.

Munkám során nemcsak felsőoktatási gyakorlatom segített, de igen hasznos volt 7 éves középiskolai tanári munkám is. Mivel az átmenet problémáiról van szó, nyilvánvalóan mindkét iskolatípus – a középfokú és felsőfokú is – sokat tehet, és kell is tennie a folytonosság biztosítása érdekében. Egyedül a felsőoktatás nem tudja megoldani ezt a problémát. A középiskola is sokat tehet azért, hogy érettségiző és továbbtanulni szándékozó tanulójának elősegítse a főiskolai ill. egyetemi hallgatóvá válását. Például: az ismeretfeldolgozás, ismeretszerzés, a tanulásirányítás, fogalomkialakítás, a jegyzetelési készség kialakítása terén, ha megteszi azokat az előkészítő lépéseket, melyek szükségesek ahhoz, hogy a felsőoktatásban oktatók fokozatosan, erre építve, a bekerülő tanulót főiskolai hallgatóvá tudják nevelni.

Az átmenet zökkenőmentesebbé tétele érdekében a hallgatók ténylegesen meglévő középiskolai matematikai ismereteire építettem a főiskolai anyagot. Ezért a hallgatók kezdeti tudásállapotát szakaszosan, minden témakör tárgyalása előtt felmértem. A felmérések alapján megállapíthatóvá vált, milyen tiszták a fogalmaik, a fogalmak közti kapcsolataik, mennyire rendezettek az ismereteik, mennyire fejlett az alkalmazási készségük. Így világos képet nyertem arról, melyek azok az ismeretek, amiket újra tárgyalni kell, milyen konkrét ismeretanyagot tudok a főiskolai anyag szempontjából rendezni velük, tehát mi az a szint, amelyről a főiskolai anyag tárgyalásakor indulnom lehet ahhoz, hogy folytonosság alakulhasson ki a középiskolai és főiskolai anyag tárgyalása között.

Ebben a cikkben az egyes témakörök előtti felméréseim közül a *függvénytani ismeretekkel* kapcsolatos felmérést szeretném ismertetni.

Feladatsor a függvénytani ismeretek felmérésére:

1. Adjon meg három függvényt!

2. *a)* Mi a függvény?

b) Mikor tekintünk megadottnak egy függvényt?

3. Függvénynek tekinthető-e a következő? Válaszait indokolja!

a) Tekintsük a sík pontjainak halmazát! Vegyünk fel a síkon egy t egyenest! A *t* minden pontjához rendeljük hozzá önmagát! A sík bármely más *P* pontjához rendeljük hozzá úgy a *P'* pontot, hogy a *t* felező merőlegese legyen a *PP'* szakasznak!

b) Tekintsük Magyarország megyéinek, ill. a megyeszékhelyeknek a halmazát! Rendeljük hozzá minden megyéhez a székhelyét!

c) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+2} \quad n \in \mathbf{N}.$

4. Sorolja fel az $x \mapsto \cos x$ függvény tulajdonságait, majd vázolja a függvény grafikonját koordináta-rendszerben!

5. Vázolja a következő függvényeket!

a) $x \mapsto x$, *b)* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$,

c) $x \mapsto x^2$, *d)* $x \mapsto \log_2 x$,

e) $x \mapsto \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

6. Vázolja a következő függvényeket!

a) $x \mapsto -2x^2 + 1$, *b)* $x \mapsto x^2 - 2x$,

c) $x \mapsto \operatorname{tg} \dfrac{1}{2}x$, *d)* $x \mapsto \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

7. Sorolja fel, hogy milyen függvényképzési módokat ismer! (Ismert függvényből vagy függvényekből milyen módon állíthatunk elő új függvényt?

8. Magyarázza meg a következő szimbólumok jelentését!

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$

Az első három feladattal a függvény-fogalom ismeretéről, annak mélységéről kívántam tájékozódni. A negyedik és ötödik feladattal a középiskolában megismert néhány alapvető függvény és a függvény-tulajdonságok ismeretét vizsgáltam. A hatodik feladat a függvények lineáris transzformációval való ábrázolásában mutatott jártasságot, a hetedik a függvényképzési módok ismeretét mérte. A nyolcadik feladattal azt kívántam felmérni, hogy a csoportból hányan foglalkoztak középiskolában a függvény határértéke és differenciál-hányados fogalmával, valamint ezekre az ismeretekre lehet-e építeni.

Az eredmények értékelése:

Az első kérdésre mindenki válaszolt, de ahogyan azt korábbi tapasztalataim alapján vártam, a hallgatók egyszerű egyváltozós valós függvényeket soroltak csak fel. (Mint például $f(x) = x$, x^2, $\sin x$, $x^2 + 1$, $(x-2)^2$, $\sqrt{x}$, 2^x stb.) Hiányosnak azokat a válaszokat minősítettem, amelyekben a hozzárendelési móddal együtt nem adták meg az értelmezési tartományt, pedig a *2. b)* 71 %-os helyes válasza mutatja, hogy a hallgatók elméletben tudják, hogyan kell függvényt megadni. A középiskolában tanulják a függvény pontos fogalmát, ezt tudják is, mint azt a *2. a)* kérdés majdnem teljes helyes megválaszolása mutatja, de az alkalmazás már nemigen megy, amit a 3. kérdéscsoport igen gyenge eredménye jelez. Ennek oka feltehetően, hogy a középiskola első osztályában ugyan megtanulják a függvény fogalmát, de a négy év során szinte csak egyválto-

A felmérés számszerű eredményei:

	Helyes válasz	Rossz válasz	Hiányos	Nincs válasz
1.	52 %	–	48 %	–
2. *a)*	97 %	–	3 %	–
b)	71 %	–	29 %	–
3. *a)*	15 %	–	23 %	62 %
b)	21 %	–	23 %	56 %
c)	12 %	–	15 %	73 %
4. tul.-ok	63 %	–	37 %	–
ábr.	55 %	12 %	33 %	–
5. *a)*	98 %	–	2 %	–
b)	75 %	–	25 %	–
c)	53 %	32 %	10 %	5 %
d)	75 %	13 %	12 %	–
e)	53 %	22 %	10 %	15 %
6. *a)*	97 %	–	3 %	–
b)	82 %	16 %	2 %	–
c)	57 %	31 %	2 %	10 %
d)	32 %	21 %	6 %	41 %
7.	5 %	12 %	17 %	66 %
8. *a)*	3 %	–	7 %	90 %
b)	3 %	–	7 %	90 %
c)	3 %	–	–	97 %

zós valós függvényekkel találkoznak. Jó lenne, ha a középiskolai tanárok kihasználnák a középiskolai anyagban rejlő egyéb lehetőségeket a függvényfogalom elmélyítésére, több oldalról történő megvilágítására.

A *3. c)* igen gyenge eredménye azért is figyelemre méltó, mivel középiskolában a sorozatokat mint speciális függvényeket tárgyalják. Sajnos a sorozatok középiskolai tárgyalásainak súlypontja eltolódik a számtani és mértani sorozat felé. Az anyagban szerepel a sorozat konvergenciájának fogalma, de ezt nem mélyítik el, pedig erre a mértani sorozat esetén jó lehetőség kínálkozik. Ezt bizonyítja, hogy a *8. a)* kérdést alig egy-két hallgató tudta sikerrel megválaszolni.

A 4. 5. és 6.-os kérdéscsoport viszonylag jó eredménye mutatja, hogy a függvénytulajdonságokat elég jól ismerik a hallgatók, ezen a téren a középiskola jó alapokat nyújtott. Csak elvétve találkoztam értéktáblázat segítségével történő ábrázolással, mely statikus szemléletre utal. A 4-es kérdés megfogalmazásakor a két feladat sorrendje nem volt véletlen. A hallgatók fele, megfordítva a sorrendet, először a grafikont rajzolta meg, majd arról olvasta le a függvény tulajdonságait. A függvény „leképezése" a koordináta-síkba, a geometriai modell mint eszköz alkalmazása, nélkülözhetetlen a középiskolai függvénytanításban. A függvény tulajdonságait a grafikon geometriai tulajdonságai jól tükrözik, de a függvény és grafikonja közti „megfeleltetés" a függvényt háttérbe szorítja, a görbe válik a vizsgálat tárgyává, és ez szemléleti torzuláshoz vezet. Mivel ez sok hallgató esetében megmutatkozott, erre fokozottan kellett figyelnem. Ez a szemléleti torzulás ugyanis olyan következményekkel járhat, hogy az alkalmazásoknál a hallgató a folyamatot leíró függvény grafikonjának geometriai tulajdonságait képtelen a folyamat tulajdonságaként értelmezni. Tehát a hallgatókban tudatosítani kellett, hogy grafikon csak eszköz a függvény megismeréséhez, és nem a vizsgálat tárgya.

A 6. feladatcsoport egy speciális függvényképzési mód – függvények lineáris transzformációi – alkalmazási képességének megállapítását szolgálta. Az *a)* és *b)* jó eredménye mutatja, hogy középiskolában a lineáris transzformációt a másodfokú függvényeken ismerik meg, de a *c)* és *d)* gyengébb eredménye szerint nem minden középiskolában tanító tanár fordít gondot ennek elmélyítésére, például a trigonometrikus függvények kapcsán. A független változó számmal való szorzása a másodfokú függvényeknél kikerülhető, és éppen ennek hangsúlyozása fontos a trigonometrikus függvények esetén, ahol ez nem kerülhető ki. Korábbi negatív tapasztalataim alapján a függvényképzési módokra csak direkt kérdés formájában kerestem a választ 7. kérdésben. Mint ahogy a számszerű eredmények mutatják, igen kevesen tudták még csak felsorolni is a középiskolai törzsanyagban szereplő függvényképzési mó-

dokat, pedig a kérdést kétféleképpen is feltettem, hogy ezzel is segítsek. Tehát a függvényképzési módokkal szinte új anyagként kellett foglalkozni.

A 8. kérdés *b)* és *c)* részére alig kaptam választ, melyből megállapíthattam, hogy az elemi analízis módszereinek megvilágítása, az intuitív fogalmak kialakítása, logikai fogalmakká fejlesztése teljes egészében a felsőoktatásra hárul.

Összefoglalva tehát megállapítható, hogy a hallgatóimnak a függvénytani ismeretei rendszerezésre, kiegészítésre szorulnak.

A hallgatók függvénytani ismereteinek rendezése, kiegészítése

A függvénytani ismereteket felmérő feladatsor kérdéseihez kapcsolódva rendeztük a hallgatók ismereteit.

Az első három feladat kapcsán a *függvény fogalmának* tisztázása, elmélyítése volt az alapvető cél. A hallgatók által az 1. kérdésben megadott függvényeket felírtuk a táblára, felelevenítettük a definiciót, hangsúlyozva, hogy a függvény az értelmezési tartomány irányából nézve egyértelmű hozzárendelés. A hallgatók a függvényeket zömmel kifejezéssel adták meg, de előfordult grafikonnal, táblázattal, sőt nyíldiagrammal történő megadás is. Tisztáztuk, hogy a hozzárendelési mód megadása még nem határozza meg egyértelműen a függvényt, meg kell adni az értelmezési tartományt is. Valamint tisztáztuk ennek kapcsán azt is, hogy a nyíldiagram, értéktáblázat, grafikon és kifejezés mikor tekinthető a függvény megadási módjának és mikor csak leírási módnak, melyiknek mik az előnyei, hátrányai.

A „miben egyeznek meg a felírt függvények" kérdés tisztázása után (mint már az 1.-ben említettem, mindegyik valós értékű függvény volt), és a 3. feladat kapcsán megállapítottuk, hogy rendkívül sok függvényhalmaz van, aszerint, hogy mi a függvények értelmezési tartományának és értékkészletének alaphalmaza. A hallgatókkal további példákat kerestettem középiskolai tanulmányaikból olyan függvényekre, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete közül legalább az egyik nem a valós számok részhalmaza, és ezeket én is további példákkal egészítettem ki. (Pl. Origó középpontú tükrözés: $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$; origó középpontú hasonlóság: $\mathbf{v} \mapsto \lambda\mathbf{v}$ $\lambda \in \mathbf{R}$: eltolás: $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{a}$ ahol $\mathbf{a}$ adott vektor; $z \mapsto z^2$, $z \in \mathbf{C}$; egységsugarú körön az egységnyi szögsebességű mozgást leíró skalár-vektor függvény: $t \mapsto (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} = \mathbf{h}$). A szereplő példákból a hallgatók láthatták, hogy az egyértelmű hozzárendelésekben szereplő halmazok nagyon változatosak lehetnek. A függvények összességét nem lehet egyszerre vizsgálat tárgyává tenni, ugyanis a függvények tulajdonságai, vizsgálati módjai a hozzárendelésben szereplő halmazoktól is függnek. Ezért szűkíteni kell a vizsgálat tárgyát a valós változójú, valós értékű függvényekre, amelyekkel a középiskolában leginkább találkoztak. Az előbbi függvényeket azért hoztam szóba, hogy a hallgatók érzékeljék a függvényfogalom alapvető jellegét a matematikai fogalmak között, másrészt a valós változós valós értékű függvényeken kívül felsőfokú tanulmányaik során más függvényosztályba tartozó függvényekkel is találkoznak, harmadrészt érezzék, hogy az egyváltozós valós függvényeket mint a vizsgálat tárgyát a környezetében kell elhelyezni.

Mivel az *egyváltozós valós függvények* halmaza is igen tág, nagyon sokféle függvényt tartalmaz, ezek vizsgálatát célszerű egyes függvénycsoportokban elvégezni. Mivel ezen függvényhalmaznak nagyon sok elemét ismerik a hallgatók a középiskolából, melyekből az 1. feladat kapcsán néhány a táblára is felkerült, ezeket a hallgatók javaslata alapján (célszerű szempont szerint) rendeztük. Javaslatukra típusok szerint részhalmazokra bontottuk: első-, másod-, *n*-ed fokú hatvány függvények, exponenciális, logaritmus függvények, trigonometrikus függvények. A 4-es és 5-ös kérdéscsoport megoldásait is felhasználva, rendre megvizsgáltuk az egyes *függvénytípusok jellemző tulajdonságait*. Ennek kapcsán összegyűjtöttük a függvény-tulajdonságokat, megfogalmaztuk ezek jelentését, és rögzítettük

az egyes függvénytulajdonságok definícióit is (monotonitás, szélsőérték, párosság-, páratlanság, periodicitás, korlátosság; néhányan megemlítették még a konvexitást-konkávitást és a folytonosságot is, itt ezeket nem definiáltuk).

A felmérő feladatsor 5., 6. és 7. kérdéscsoportjához kapcsolódva tértünk rá a *függvényekkel végzett műveletekre* (összeadás, kivonás, szorzás, hányados képzése, inverz képzése, összetett függvény képzése, ez utóbbi speciális eseteként a független változó lineáris transzformációja). Az ezekben szereplő függvényeket vizsgálva alkottuk meg a függvényképzési műveletek definícióit. A fogalmak elmélyítését további egyszerűbb feladatok segítették. (Például: alkalmazza a következő függvényekre a műveleteket: $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto 3^x$ és állapítsa meg, mely függvényeket kaphatjuk így meg!) A példák kapcsán a függvényképzés szempontjából fény derült a függvénytípusok közti kapcsolatra is. (Például az $x \mapsto x^2$ függvény származtatható szorzással az $x \mapsto x$ függvényből, vagy ez utóbbiból nyerjük reciprokképzéssel az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényt. Vagy például az $x \mapsto 3^x$ függvényből inverzképzéssel az $y \mapsto \log_3 y = x$ függvényt nyerjük, ezt $c \neq 0$ számmal szorozva az $y \mapsto c \cdot \log_3 y = x$ adódik. Így az összes $x = \log_a y$ alakú függvényt megkapjuk, mivel $\log_a y = \frac{\log_3 y}{\log_3 a}$ $a > 0$, $a \neq 1$ esetén $C = \frac{1}{\log_3 a}$. Az $y \mapsto \log_a y = x$ függvény inverze az $x \mapsto a^x = y$, tehát az $x \mapsto 3^x$-ből kiindulva az összes logaritmus és exponenciális függvényt megkaptuk.)

A vizsgálatok eredményeként a függvényképzés szempontjából új tájékozódási bázist tudtunk kialakítani, megállapítva, melyek azok a függvények, amelyekből az ismert fontos függvények előállíthatók, hány lényegesen különböző alapfüggvény van.

Ezek $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin x$ (de lehet például a $\cos x$ is), (és egy exponenciális függvény például az) $x \mapsto 2^x$. Ezután közöltem, hogy ezekből az alapfüggvényekből a függvényképzési módokkal származtatható függvényeket elemi függvényeknek nevezzük.

A típusok szerinti vizsgálatról a függvényképzési szempontból való tájékozódási bázisra történő áttérés nemcsak a függvénytípusok közti kapcsolat felismerése szempontjából fontos. Fontos azért is, mert a későbbiekben a függvény határértékével, folytonosságával, differenciálásával kapcsolatos tételeket is a függvényképzési módok szerint tárgyaljuk.

Remélem, hogy cikkemmel segítségére lehettem középiskolában tanító kollégáimnak munkájuk eredményesebbé tételéhez. Úgy gondolom, hogy hasonló kérdéssor és annak elemzése segítségével lehetőség nyílik 4. osztály második félévében, az általános és középiskolán végighúzódó ezen nagy témakör ismeretanyagának logikai rendszerezésére.

Irodalom

[1.] Megyesi László-Peller József: Számsorozatok, számosság, Integrálszámítás, Tankönyvkiadó, Bp. 1989.

[2.] Peller József: Exponenciális és logaritmusfüggvény, Differenciálszámítás Tankönyvkiadó, B. 1987.

[3.] Peller József-Megyesi László: Függvények elemi vizsgálata, Vektortér Tankönyvkiadó, Bp. 1982.

[4.] Peller József: Ponthalmazok, számhalmazok, poliomok, függvények, algebra Tankönyvkiadó, Bp. 1980.

[5.] Pólya György: A gondolkodás iskolája Gondolat Kiadó, Bp. 1977.

[6.] Pólya György: A problémamegoldás iskolája, Tankönyvkiadó, Bp. 1971.

[7.] Pólya György: Indukció és analógia (A matematikai gondolkodás művészete I.) Gondolat Kiadó, Bp. 1988.

[8.] Rédling Elemér: Geometriai transzformációk, Tankönyvkiadó, Bp. 1980.

[9.] Skemp: A matematika tanulás pszichológiája

[10.] Szemelvénygyűjtemény a matematika tanításához, (Szerk.: dr. Vörös György) Tankönyvkiadó, Bp. 1976.

Versenyekről

Az úgynevezett ,,amerikai verseny'' mintájára az elmúlt években az olimpiai szakkörök keretében került megrendezésre a számválaszos verseny. Az ez évben írt 15 feladat mellett az elmúlt évi verseny feladatait is közöljük, mert nem közismertek. A versenyen semmiféle segédeszköz – még zsebszámológép – sem használható, ideje 90 perc. A feladatokat Reimann István egyetemi docens állította össze.

Számválaszos verseny (1993. február)

1. Mivel egyenlő $25xy$, ha $x + y = 1$ és $x^3 + y^3 = \frac{7}{25}$?

2. Hány olyan számtani sorozat van, amelynek első száz eleme között a π és a 2π is szerepel?

3. A 4-re végződő 3-mal osztható ötjegyű számok száma:

4. Megmértük egy vízszintes terepen álló 100 m magas torony látószögét a talppontjától 100, 200 és 300 m távolságból. Hány fokos e három látószög összege?

5. Négy adott szakasz kezdőpontja közös; hosszaik: 2, 3, 5, 6. Mekkora lehet maximálisan a végpontjaik által meghatározott négyszög területe?

6. 8 x 8-as sakktáblán egy egyenest húzunk. Legfeljebb hány mező belsejében haladhat ez az egyenes?

7. A pozitív számok halmazán értelmezett f függvény eleget tesz a

$$2f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2x - 1}{x + 1}$$

függvényegyenletnek. Mivel egyenlő $200f(99)$?

8. $7^{1992} - 1$ és 83 706 legnagyobb közös osztója?

9. Melyik az a legnagyobb N négyjegyű szám, amelyik négyzetének első négy jegye éppen N-et adja ki?

10. Egy rendezőnek úgy kell leültetnie egy kerekasztal mellé a lehető legtöbb vendéget, hogy azoknak a vendégeknek a száma, akiknek a jobb oldalán velük egynemű vendég ül, egyenlő legyen azoknak a vendégeknek a számával, akikre ez nem igaz. Maximálisan hány ember ülhet le, ha az asztalnál legfeljebb 99-en férnek el?

11. Egy mértani sorozat első eleme 5, huszadik eleme 0,4. Mekkora az első húsz elem szorzata?

12. Egy gúla alaplapja téglalap, oldaléleinek hossza (ebben a sorrendben): x, 7, 9, 6. Mekkora az x?

13. Az egységkörbe írt szabályos n-szög oldala a_n. Határozzuk meg n legkisebb értékét, amelyre

$$a_n^2 = a_{2n-4}^2 + a_{2n}^2 .$$

14. Legfeljebb hány eleme lehet annak a véges sorozatnak, amelyben bármely 7 egymást követő elem összege negatív és bármely 13 egymást követő elem összege pozitív?

15. Egy négyjegyű szám jegyeiből (amelyek nem mind egyenlők) elkészítjük a lehető legnagyobb és a lehető legkisebb négyjegyű számot (ennek első jegyei között nullák is lehetnek), ezek különbsége az „első különbség". Az első különbség négy jegyéből az előző módszer szerint előállítjuk a „második különbséget", majd ezt az eljárást folytatjuk. Mi lesz az 1993. különbség?

Számválaszos verseny (1992. február)

A megoldásnak csak a végeredményét kell közölni.

1. Adjuk meg az x egész legnagyobb olyan értékét, amelyre $\frac{x^2+2}{x+3}$ is egész.

2. Egy táblára úgy akarunk felírni pozitív egész számokat, hogy ezek bármely részhalmazában a számok összege ne legyen osztható 92-vel. Legfeljebb hány számot írhatunk fel, ha egyetlen számot is tekinthetünk összegnek?

3. Mi a harmadik tagja annak a növekvő mértani sorozatnak, amelynek 100 és 1000 közötti tagjai egészek, a lehető legtöbb tagja van e két határ között, és első tagja nagyobb 100-nál?

4. Egy ország közlekedési vállalata bejelenti, hogy az ország 21 városa között n számú autóbuszjáratot létesít; egy járat pontosan két várost köt össze. Legalább mekkorának kell lennie n-nek, hogy a lakosság biztos lehessen abban, hogy – esetleg átszállásokkal – bármely városból bármely városba el tud jutni a vállalat vonalain?

5. Az $ABCD$ négyzet belső P pontjára $PA = 1$, $PB = 2$, $PC = 3$. Hány fokos az $APB\sphericalangle$?

6. Hány rácspont van az $ABCD$ paralelogramma belsejében, ha három csúcsa: $A(2; 22)$ $B(4; 1)$, $C(25; 3)$?

7. Egy négyszög oldalainak a hossza, ebben a sorrendben: 5, 7, 12, $2\sqrt{30}$. Hány fokos az átlók hajlásszöge?

8. Legfeljebb hány éle lehet egy 30 csúcsú gráfnak, ha bármely két, éllel összekötött csúcshoz található olyan csúcs, amely a két csúcs egyikével sincs összekötve?

9. a, b, c, d olyan pozitív egészek, amelyekre $a + b = cd$ és $c + d = ab$ teljesül. Mekkora lehet maximálisan $a + b + c + d$?

10. Határozzuk meg $99^{99} - 51^{51}$ utolsó két jegyét!

11. Legfeljebb hány hegyesszöge lehet egy 30 oldalú sokszögnek?

12. Mekkora az

$$\left\{\frac{1\cdot 1992+100}{121}\right\}+\left\{\frac{2\cdot 1992+100}{121}\right\}+\ldots+\left\{\frac{121\cdot 1992+100}{121}\right\}$$

összeg, ha $\{x\}$ az x törtrészét jelenti?

13. Az egységkörbe írt szabályos n-szög oldala a_n. Határozzuk meg n legkisebb értékét, amelyre $a_n^2 = a_{n+1}^2 + a_{2n}^2$ teljesül!

14. Képezzük az {1,2,3,....,1992} halmaz összes nem üres részhalmazát; az egy részhalmazban levő számokat szorozzuk össze és vegyük a szorzat reciprokát, majd ezeket adjuk össze. Mekkora ez az összeg? (Egytényezős szorzatokat is értelmezünk).

15. Legfeljebb mekkora lehet az $(n^2 + 150)$ sorozat két szomszédos tagjának a legnagyobb közös osztója?

Január 13-án volt a négy budapesti speciális matematikai osztályos gimnáziumban a 8. osztályosok részére kiírt verseny 120 perces írásbeli fordulója.

A felvételi előkészítő verseny írásbeli feladatai: (Árpád Gimn., Berzsenyi Gimn., Fazekas Gimn., Szt. István Gimn.)

1. Egymás mellé leírtuk a pozitív egészeket 1-től 100-ig, majd az így kapott számból az 1-es számjegyeket elhagytuk. Jelöljük az így nyert számot A-val!
a) Hány jegyű A?
b) Mennyit ad maradékul A, ha 9-cel elosztjuk? **6 pont**

2. Egy szám 3000 db 1-esből, néhány 0-ból és 9-esből áll. Lehet-e ez a szám négyzetszám? **7 pont**

3. Fel lehet-e bontani egy kockát 20 db – nem feltétlenül egybevágó – kisebb kockára? **8 pont**

4. Egy négyjegyű szám első két jegyének összegét megszoroztuk utolsó két jegyének összegével s eredményül 187-et kaptunk. Hány ilyen négyjegyű szám van? **9 pont**

5. Egy félkörív két végpontja A és F. A félkörívet öt egyenlő részre osztottuk. Az osztópotok rendre B, C, D, E. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overline{AD} = \overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{AF}$$ **10 pont**

6. Adottak az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{13}$ és a $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{13}$ egész számok. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan i, j, k egész szám ($i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, $1 \leq i \leq 13$, $1 \leq j \leq 13$, $1 \leq k \leq 13$), hogy

$$\frac{a_i + a_j + a_k}{3} \text{ és } \frac{b_i + b_j + b_k}{3} \text{ is egész.}$$ **10 pont**

A Varga Tamás Országos Matematikaverseny döntője 7. osztály (1993. január 6.)

1. Négy gyerek, Anna, Béla, Csaba és Dénes egy csónakot bérelt 600 Ft-ért. Anna feleannyit fizetett, mint a másik három együttvéve. Béla harmadannyit, mint a másik három együtt, Csaba pedig negyedannyit, mint a másik három együtt. Mennyit fizetett Dénes?

2. Bizonyítsd be, hogy ha egy négyszög egyik átlója felezi a négyszög területét, akkor felezi a másik átlót is!

3. Egy teremben 300 szék van, minden sorban ugyanannyi. Hogy az ülőhelyeket ne csak oldalról lehessen megközelíteni, azért minden sor közepéről kivettek 3 széket, és így a terem közepén utat vágtak. A kiemelt székekből a terem végében újabb sorokat alakítottak ki, s ezek mindegyikében ugyanannyi szék van, mint az előző sorokban az elrendezés után lett. Hány sor lehetett eredetileg a teremben?

4. Az 1; 2; 3; 4; 5 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával ötjegyű számokat képezhetünk.
   a) Hány különböző ilyen ötjegyű szám van?
   b) Ezeket a számokat nagyság szerint növekvő sorrendbe állítva, melyik szám áll a 82. helyen?

5. Bizonyítsd be, hogy egy hegyesszögű háromszög három oldalfelező pontja és az egyik magasság talppontja egyenlő szárú trapézt határoz meg!

Az országos verseny döntője matematikából 8. osztály

1. Egy teremben öt lámpa van. Mindegyiket önállóan lehet meggyújtani. Hányféleképpen égnek a lámpák, ha legalább egynek égnie kell?

2. Az ABC háromszögben $\beta = 40°$; $\gamma = 60°$ és $AB = 2$. Mekkora a PQR háromszög kerülete, ha P az AB oldal felezőpontja, Q és R pedig az A-ból, illetve a B-ből induló magasságok talppontjai?

3. Bizonyítsd be, hogy minden 3-nál nagyobb egész szám előállítható prímszámok összegeként!

4. Egy rombusz belsejében van egy négyzet. Bizonyítsd be, hogy a négyzet két szemközti oldalegyenese a rombusz egyik átlójának egyeneséből ugyanakkora szakaszt metsz ki, mint a négyzet másik két szemközti oldalegyenese a rombusz másik átlójának egyeneséből!

5. „Nézd Máté – szólt Kata testvéréhez –, ebben a nyolc dobozban piros és kék golyók találhatók. Egy dobozban mindkét színű golyó előfordulhat.
   A dobozokban rendre 7, 10, 13, 18, 28, 31, 46 és 62 golyó van. Én tudom, hogy melyik dobozban hány piros és hány kék golyó van, te nem tudod.
   Most jön a feladat! Vegyél el úgy egy dobozt, hogy a megmaradt hét dobozban összesen kétszer annyi piros golyó legyen, mint ahány kék!"
   Máté elmélyülten töprengett egy darabig, majd felcsillant a szeme, és elvett egy dobozt.
   „Ügyes vagy" – nyugtázta Kata Máté döntését.
   Melyik dobozt vette el Máté? Miért?

Scharnitzky Viktor

Könyvismertetés

Bonifert Domonkos: Néhány tipikus problémaszituáció matematikából
Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1992. (240 old.)

Amint azt a kötet végén található irodalomjegyzék is tanúsítja, hazánkban az utóbbi 20 évben elég sok feladatgyűjtemény jelent meg, amelyek egyik része a címükben megfogalmazott célok érdekében meghatározott ismeretanyag tárgyalására szorítkozott, másik része eleve adott, pl. versenyfeladatok megoldásait vagy a szerzőjük kedvenc feladatait tartalmazza. Sokezer további feladat van a ,,hivatalos'' feladatgyűjteményekben is. Mégis örömmel üdvözölni kell az újabb és újabb példatárakat is, hiszen mindegyikük tartalmaz eredeti vagy magyar nyelven először megjelenő vagy ismert, de új szempontok szerint összegyűjtött, illetve sorbarendezett feladatokat. Ez különösen méltányolandó akkor, ha ezzel valamilyen didaktikai célt kísérel megvalósítani az összeállító. Bonifert Domonkos e kötete érzésem szerint célraorientált óhajtott lenni, nevezetesen előtérbe helyezte a szemléltetést, az egy-egy feladattal kapcsolatosan feltehető, további kérdések kimerítő kivizsgálását, új kapcsolatok felderítését és nem utolsó sorban az érdekességet, a különlegességet, a különösséget.

A könyv 200 feladatot és azok megoldását tartalmazza öt fejezetbe csoportosítva. Ezek: Függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek. Bizonyítsuk be! Szélsőérték-feladatok. Van olyan? Számoljuk meg! Egyéb érdekességek.

Egy-egy fejezetbe nagyon sokféle és egymástól mind témában mind a megoldáshoz fölhasznált ismeretekben és módszerekben lényegesen eltérő feladat került. Az első fejezetben pl. egymás mellé kerültek ábrázolandó függvények megoldandó egyenletek és egyenlőtlenségek (ahol csak lehetett, a grafikus szemléltetés is a helyén volt), nevezetes egyenlőtlenségek, bizonyítandó egyenlőtlenségek, geometriai egyenlőtlenségek,függvényegyenletek. A második fejezetbe olyan feladatok kerültek, amelyek úgy kezdődnek: Bizonyítsuk be! Ezek túlnyomó többsége számelméleti jellegű, de van közöttük geometriai tételeket bizonyító feladat is. A harmadik fejezet címe pontosan fedi a benne szereplő feladatok jellegét. A megoldások természetesen nem veszik igénybe a felsőbb matematikát (pl. a differenciálszámítást) és éppen ezért sok leleményes elemi fordulatot mutatnak be. A negyedik fejezet első része (Van olyan?) egzisztencia-problémákat tárgyal, a második része megszámlálási feladatokat mutat be. Ez az a fejezet, amely leginkább mutat túl a jelenlegi középiskolai anyagon és módszereken. Az utolsó fejezetben szép, tanulságos, részben meglepő egyedi feladatok kavalkádja van.

A feladatok bemutatott megoldása legfeljebb középiskolai ismereteket használ fel és néhány feladata az általános iskolai szakkörökben is fölhasználható. A megoldások szövege korrekt és elég részletes ahhoz, hogy a diák is megértse. Mivel a szemléltetés és az ábra hangsúlyos szerepet kapott a kötetben, javasolnám, hogy (egy esetleges új kiadás esetén) valamennyi ábrán szerepeljen az ott látható görbék egyenlete és én pl. az $y = x^2$ vagy graf($x \mapsto x^2$) jelölés mellett szavaznék, mert az ábrán grafikont látok.

Egyetértek a szerző megállapításával: ,,Ez az összeállítás elsősorban tehetséges diákoknak és az őket tanító tanároknak igyekszik segítséget nyújtani'' – de ez éppen a címből nem derül ki azonnal.

Scharnitzky Viktor

Új könyvek

Az alábbi felsorolásban olyan könyvek szerepelnek, amelyek 1991 második felében és 1992-ben jelentek meg. A lista nem tartalmaz általános és középiskolai tankönyveket, felsőoktatási és tanfolyami jegyzeteket, továbbá belső használatra megjelent kiadványokat.

A könyvpiac egyre nehezebb áttekinthetősége miatt kérek minden szerzőt, akinek matematikai tárgyú kiadványa jelent meg, hogy műve egy példányát az Új könyvek listáján való szereplés érdekében az alábbi címre küldeni szíveskedjék: ELTE, Matematikai Könyvtár, Budapest, Múzeum krt. 6-8. 1088.

ÁBRAHÁM ISTVÁN: *A számok világa 2*, útmutató az egyéni tanuláshoz, Budapest, 1991, Tankönyvkiadó, 77 oldal.

ANDRÉKA, H. - MONK, J. D. - NÉMETI, I. (editors): *Algebraic logic*, Colloquia Mathematica Societatis János Bólyai 54, Amszterdam - Budapest - Oxford - New York, 1991, North - Holland Publ. Co. and János Bolyai Mathematical Society, 746 oldal.

BÁRCZY BARNABÁS: *Integrálszámítás*, Példatár, 6. kiadás, Budapest, 1992, Műszaki Könyvkiadó, 359 oldal.

BLÁZSOVICS JÓZSEF: *Kisokos matematikából*, Budapest, 1992, Akkord és Panem Kiadó, 608 oldal.

BONIFERT DOMONKOS: *Néhány tipikus problémaszituáció matematikából*, Szeged, 1992, Mozaik Oktatási Stúdió, 235 oldal.

CSAHÓCZI ERZSÉBET: *Töprengő III*, Gondolkodtató matematikai feladatok 8-9 éveseknek, Szeged, 1992, Mozaik Oktatási Stúdió, 62 oldal.

CSAHÓCZI ERZSÉBET: *Töprengő IV*, Gondolkodtató matematikai feladatok 9-10 éveseknek, Szeged, 1993, Mozaik Oktatási Stúdió, 84 oldal.

CSAHÓCZI ERZSÉBET - KOVÁCS CSONGORNÉ - LAJOS JÓZSEFNÉ: *Kis Matematikusok Baráti Köre, tanári útmutató, 5. osztály*, Budapest, 1991, TIT, 47 oldal.

CSAHÓCZI ERZSÉBET: *Kis Matematikusok Baráti Köre, tanári útmutató, 6. osztály*, Budapest, 1991, TIT, 64 oldal.

CSATÁR KATALIN - GÁBOS ILDIKÓ: *Számelmélet, tanári útmutató, I. osztály*, Budapest, 1991, Calibra, 44 oldal.

CSERNYÁK LÁSZLÓ (szerk.): *Analízis*, matematika üzemgazdászoknak, főiskolai tankönyv, 3. kiadás, Budapest, 1991, Tankönyvkiadó, 287 oldal.

CSERNYÁK LÁSZLÓ (szerk.): *Operációkutatás*, matematika üzemgazdászoknak, főiskolai tankönyv, 3. kiadás, Budapest, 1991, Tankönyvkiadó, 231 oldal.

CSERNYÁK LÁSZLÓ (szerk.): *Valószínűségszámítás*, matematika üzemgazdászoknak, főiskolai tankönyv, 2. kiadás, Budapest, 1991, Tankönyvkiadó, 219 oldal.

DENKINGER GÉZA - GYURKÓ LAJOS: *Analízis gyakorlatok*, egyetemi segédkönyv, 3. kiadás, Budapest, 1991, Tankönyvkiadó, 379 oldal.

DENKINGER GÉZA - SCHARNITZKY VIKTOR - TAKÁCS GÁBOR - TAKÁCS MIKLÓS: *Matematikai zseblexikon*, Bp, 1992, Akadémiai Kiadó - Typotex, 597 oldal.

DETREKŐI ÁKOS: *Kiegyenlítő számítások*, egyetemi tankönyv, Budapest, 1991, Tankönyvkiadó, 684 oldal.

GÁDOR ENDRÉNÉ - GYAPJAS FERENCNÉ - HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA - KORÁNYI ERZSÉBET - PÁLMAY LÓRÁNT - POGÁTS FERENC - REIMAN ISTVÁN - SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*, 10. kiadás, Budapest, 1992, Tankönyvkiadó, 478 oldal.

GÁDOR ENDRÉNÉ - GYAPJAS FERENCNÉ - HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA - KORÁNYI ERZSÉBET - NAGYNÉ PÁLMAY PIROSKA - PÁLMAY LÓRÁNTNÉ - POGÁTS FERENC - REIMAN ISTVÁN - SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából, megoldások I-II*, 3. kiadás, Budapest, 1991, Tankönyvkiadó, 410 + 439 oldal.

GÁSPÁR LÁSZLÓ: *Mátrixaritmetikai gyakorlatok*, egyetemi segédkönyv, 5. kiadás, Budapest, 1992, Tankönyvkiadó, 442 oldal.

GERŐCS LÁSZLÓ: *Érettségi-felvételi matematikapéldák*, Budapest, 1992, Műszaki Könyvkiadó, 269 oldal.

GREENSPAN, D. - RÓZSA, P. (editors): *Numerical methods*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 59, Amsterdam - Budapest - Oxford - New

York, 1991, North-Holland Publ. Co. and János Bolyai Mathematical Society, 378 oldal.

GYETVÁN FERENC - VARGA JÓZSEF: *Matematika I-II*, Felkészítő, teszt- és segédkönyv felvételizők és érettségizők számára, Pécs, 1992, Prezident Bt., 449 oldal.

HAJDU SÁNDOR (szerk.): *Kézikönyv a matematika 7. osztályos anyagának tanításához*, 1991, Tankönyvkiadó, 379 oldal.

HAJNAL IMRE: *Matematikai fogalmak, tételek*, Szeged, 1992, Mozaik Oktatási Stúdió, 198 oldal.

JUHÁSZ ISTVÁN - LACZKÓ LÁSZLÓ: *Feladatgyűjtemény I.* Válogatás posztgraduális képzésen résztvett középiskolai matematikatanárok záródolgozataiból, Budapest, 1992, BJMT, 63 oldal.

JÜRGENSEN, H. - MIGLIORINI, F. - SZÉP, J.: *Semigroups*, Budapest, 1991, Akadémiai Kiadó, 121 oldal.

KASSAY GÁBOR: *Minimax tételek és alkalmazásaik*, Budapest, 1992, ELTE, 43 oldal.

KOSZTOLÁNYI JÓZSEF - MIKE JÁNOS - VINCZE ISTVÁN: *Érdekes matematikai feladatok*, 3. kiadás, Szeged, Mozaik Oktatási Stúdió, 143 oldal.

KOVÁCS JÓZSEF - TAKÁCS GÁBOR - TAKÁCS MIKLÓS: *Analízis*, főiskolai tankönyv, 3. kiadás, Budapest, 1992, Tankönyvkiadó, 471 oldal.

NIKODÉMUSZ ANTAL: *Parciális differenciálegyenletek 1-2*, Budapest, 1991, LSI OMAK, 314 oldal.

OBÁDOVICS JÓZSEF GYULA: *Numerikus módszerek*, Budapest, 1991, LSI ATSZ, 140 oldal.

Országos Tudományos Diákköri Konferencia, Természettudományi Szekció, Matematika-fizika (1991, Pécs), Pécs, 1991, JPTE, 32 oldal.

PAKSY SÁNDOR: *Szorobánnal gyerekjáték*, Budapest, 1991, Calibra, 54 oldal.

PÁLFALVINÉ CSEKŐ SÁRI - SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA - TÖRÖK JUDIT: *Kis Matematikusok Baráti Köre, tanári útmutató, 7. osztály*, Budapest, 1991, TIT, 89 oldal.

RÁBAI IMRE: *Matematika érettségi, felvételi feladatok és megoldások 1991*, Budapest, 1991, Calibra, 60 oldal

REIMAN ISTVÁN: Matematika, Budapest, 1992, Műszaki Könyvkiadó, 607 oldal.

ROSENBERG, AMYE: *Számoljunk együtt 1-től 100-ig*, Budapest, 1992, Lilliput, 36 oldal.

RÓKA SÁNDOR: *1000 feladat az elemi matematika köréből*, Budapest, 1992, Typotex, 198 oldal.

RÓZSA PÁL: *Lineáris algebra és alkalmazásai*, egyetemi tankönyv, 3. átdolgozott kiadás, Budapest, 1991, Tankönyvkiadó, 646 oldal.

RUZSA IMRE: *Intensional logic revisited*, Budapest, 1992, a szerző kiadása, 146 oldal.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából 1989-1992*, IX. kötet, Budapest, 1992, Tankönyvkiadó, 251 oldal.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Válogatott egyetemi felvételi feladatok matematikából 1966-1985*, 2. kiadás, Budapest, 1992, Tankönyvkiadó, 553 oldal.

SCHARNITZKY VIKOR: *Vektorgeometria és lineáris algebra*, főiskolai takönyv, 4. kiadás, Budapest, 1992, Tankönyvkiadó, 263 oldal.

SCHARNITZKY VIKTOR (szerk.): *Válogatott matematikai feladatok megoldásai 1. kötet*, Budapest, 1992, Terraprint, 160 oldal.

STAAR GYULA: *Megszállottak, öt magyar fizikus*, Budapest, 1991, Typotex, 192 oldal.

STEWART IAN: *A matematika problémái*, Budapest, 1991, Akadémiai Kiadó, 279 oldal.

SZABADOS, J. - TANDORI, K. (editors): *Approximations theory*, Colloquia Societatis János Bolyai 58, Amsterdam - Budapest - Oxford - New York, 1991, North-Holland Publ. Co. and János Bolyai Mathematical Society, 798 oldal.

SZÁSZ GÁBOR: *Matematika I.*, Vektorok, komplex számok, egyváltozós valós függvények, egyetemi tankönyv, 3. kiadás, Budapest, 1992, Tankönyvkiadó, 437 oldal.

SZÁSZ GÁBOR: *Matematika II.*, Többváltozós és vektorfüggvények, lineáris algebra, sorok, komplex függvények, algebrai egyenletek, egyetemi tankönyv, 3. kiadás, 1992, Tankönyvkiadó, 442 oldal.

SZÁSZ GÁBOR: *Matematika III.*, Differenciálegyenletek, valószínűségelmélet, egyetemi tankönyv, 3. kiadás, Budapest, 1992, Tankönyvkiadó, 351 oldal.

SZELEZSÁN JÁNOS: *Fejezetek a matematikából számítástechnikusoknak*, Budapest, 1991, Számalk, 55 oldal.

SZENTHE, J. - TAMÁSSY, L. (editors): *Differential geometry and its applications*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 56, Amsterdam - Budapest - Oxford - New York, 1992, North-Holland Publ. Co. and János Bolyai Mathematical Society, 727 oldal.

SZÉNÁSSY BARNA: *History of Mathematics in Hungary until the 20th Century*, Budapest, 1992, Akadémiai Kiadó, 369 oldal.

UJVÁRI ISTVÁN: *Felkészítés és felzárkózás matematikából az általános és középiskolai tanulók számára*, 7. kiadás, Budapest, 1992, Typotex, 158 oldal.

UJVÁRI ISTVÁN: *Középiskolába készülök!* Összefoglaló matematikából nyolcadikosok számára, 2. kiadás, Celldömölk, 1991, Apáczai Kiadó, 152 + 46 oldal.

VETIER ANDRÁS: *Szemléletes mérték- és valószínűségelmélet*, egyetemi tankönyv, Budapest, 1991, Tankönyvkiadó, 587 oldal.

Könyvajánlat

Csahóczi Erzsébet

TÖPRENGŐ III - IV.
Tehetséggondozó matematikai feladatok 8-9, 9-10 éveseknek

A Töprengő c. feladatgyűjtemény a matematika iránt érdeklődő 8-9 illetve 9-10 éves gyerekek számára készült. Fő célja a tanulók gondolkodásának fejlesztése változatos feladatsorokon keresztül. A feladatok tartalma, témája, nehézségi foka, megfogalmazása igazodik a korosztály életkori sajátosságaihoz. A feladatok tematikus feldolgozása, a megoldások közlése módot ad a gyerekeknek az önálló feldolgozásra és önellenőrzésre. A tanítók is jól használhatják órákon és szakkörökön.

Megjelent 168,- Ft

Kosztolányi József - Mike János - Vincze István

Jól felkészültem-e ?
Matematikai feladatsorozatok általános iskolásoknak
5 – 6 – 7 – 8. osztály, valamint középiskolába készülőknek

Folytatjuk a sikeres „Jól felkészültem-e?" sorozatunkat, a biológia és a fizika után ezúttal matematikából. A kiadványok felölelik az általános iskolák felső tagozatának teljes tananyagát, míg a sorozat ötödik kötete segítséget nyújt azoknak a tanulóknak, akik tanulmányaikat valamilyen középiskolában szeretnék folytatni. A feladatsorozatok változatos feladatokkal, kérdésekkel segítik elő a felkészülést, amelyekből a diákok lemérhetik, hogy milyen szinten sikerült az adott tananyagot elsajátítaniuk.

Megjelenik: 1993. szeptember

Bartók Katalin - Szebeni Lászlóné - Péter Szabó Istvánné

Matematikai gyakorló feladatok általános iskola 2 – 3 – 4. osztály számára

A kiadvány célja, hogy az általános iskolák 2-3-4. osztályos tanulói minél hamarabb és minél könnyebben megszerezzék matematikai ismereteiket. Olyan munkáltató feladatlap, mely a nevelők, szülők segítségével, és önállóan is jól használható. A sok érdekes feladat lehetőséget ad az eddigi tudás felelevenítésére, bővítésére. A feladatlap végén található felmérő lapok segítségével a tanulók tudásukat mérhetik le, és még játékos fejtörők is várnak az érdeklődőkre. Főleg azoknak nyújt segítséget, akiknek több gyakorlásra van szükség a tananyag elsajátításához.

Megjelenés időpontja: 1993. május

imasoft

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

1993. MÁJUS ára: 86,- Ft I. évf. / 3. szám

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

TARTALOM

GONDOLATOK EGY ALSÓ TAGOZATOS JÁTÉK KAPCSÁN
C. Neményi Eszter
főiskolai docens, Budapesti Tanárképző Főiskola

HATÉVFOLYAMOS GIMNÁZIUMI KÍSÉRLET A BUDAPESTI EÖTVÖS JÓZSEF GIMNÁZIUMBAN
Somfai Zsuzsa
tanár, Eötvös József Gimnázium, Budapest

„RENDEZETT" ÉS „RENDEZETLEN" ÖSSZEGEZÉS
Dr. Benkő József
egyetemi tanár, Transilvania Egyetem, Brassó

VERSENYFELADATOK
Dr. Urbán János
középiskolai tanár,
Berzsenyi Gimnázium, Budapest

Az alsó tagozatos matematikatanításban – ha pontos arányát nehéz is lenn meghatározni – döntő szerepük van azoknak a helyzeteknek, tevékenységeknek, amelyek funkciója a fejlesztés, és viszonylag ki hányadban találunk kifejezetten és kizárólagosan tény- vagy eljárásismeret ... *(4. oldal)*

Az utóbbi években a gimnáziumok többsége tudatosítja és megfogalmazza a maga számára azt a felismerést, hogy az átlagosan képző középfokú oktatás elterjesztésével, az ilyen irányú társadalmi igény fokozott megjelenésével kettős szorításban kell feladatait megoldania. ... *(11. oldal)*

Mielőtt már-már lemondanánk a véges összegek szép és hasznos tulajdonságainak kiterjesztéséről, fordítsuk meg a kérdésfeltevést, gyanúsítsuk meg a sorösszegzés *módszerét* azzal, hogy ő tüntette el a szóban forgó tulajdonságokat, és keressük az összegzésnek egy olyan ... *(15. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Olvasószerkesztő: Földvári Erika
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 430 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Hirdetésekkel kapcsolatos
felvilágosítás:Tóth Mónika
Tel.: (62) 312-988

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

GONDOLATOK EGY ALSÓ TAGOZATOS JÁTÉK KAPCSÁN
C. Neményi Eszter
főiskolai docens, Budapesti Tanárképző Főiskola

HATÉVFOLYAMOS GIMNÁZIUMI KÍSÉRLET A BUDAPESTI EÖTVÖS JÓZSEF GIMNÁZIUMBAN
Somfai Zsuzsa
tanár, Eötvös József Gimnázium, Budapest

„RENDEZETT" ÉS „RENDEZETLEN" ÖSSZEGEZÉS
Dr. Benkő József
egyetemi tanár, Transilvania Egyetem, Brassó

VERSENYFELADATOK
Dr. Urbán János
középiskolai tanár,
Berzsenyi Gimnázium, Budapest

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 10-12 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat.

C. Neményi Eszter

Gondolatok egy alsó tagozatos játék kapcsán

A játék

Két gyerek ül az osztállyal szemben: Klári és Balázs. Kezükben egy-egy kártya, előttük zsebszámológép. A rózsaszínű kártyán is, a zöldön is egy-egy kifejezés áll számokkal, műveleti jelekkel és egy ⌓ alakú kerettel. A két gyerek nem láthatja egymás kártyáját, a többiek sem tudják, mi van felírva rájuk.

A táblán két színes téglalap jelzi a kártyákat a játékosok nevével, előttük a ⌓ keret rajza:

	Klári	Balázs
⌓	▭	▭
	(rózsaszín)	(zöld)

A helyükön ülő gyerekek azt szeretnék elérni, hogy a két játékos minél előbb találkozzon, hogy minél előbb ,,fogják meg egymást''. Innen származik a játék címe: *,,Fogócska''*.

– 10 – mondja Gábor.

Erika néni felírja a tízet a ⌓ keret alá. A két játékos számolgat valamit, aztán válaszol. A rózsaszín kártyával dolgozó Klári azt mondja: az enyém 4800. Balázs a zöld kártya ,,értékét'' árulja el: 150. Ez is felkerül a táblára:

⌓	▭	▭
10	4800	150

– Jó messze vannak! – mondja Kata.

– 100 – javasolja az új számot Anna.

Klári 3000-rel, Balázs 600-zal válaszol. Erika néni ezeket a számokat is felírja a helyükre és jelzi, melyik szám a nagyobb:

⌓	▭		▭
10	4800	>	150
100	3000	>	600

Ezután sorra a következő számokat jegyzik még a táblára, miközben megfigyeléseiket is elmondják a gyerekek:

200	1000 < 1100	(,,Már majdnem találkoztak!'') (,,Igen, de most Balázsé nagyobb!'')
210	800 < 1150	(,,Nem látod? Vissza kell fordulni!'')
150	2000 > 850	(,,Ismét Klárié nagyobb! Menjünk közelebb a 200-hoz.'')
190	1200 > 1050	(,,Még nagyobb kell!'')
195	1100 > 1075	
196	1080 = 1080	

– Nyolc lépés alatt találkoztak! Egyszer léptek fölöslegesen közben!

Csak ezután teszi fel Erika néni a keretek helyére a két kártyát:

⌓ $\boxed{5000 - ⌓ \cdot 20}$ $\boxed{100 + ⌓ \cdot 5}$

(Máskor azt is a gyerekek találhatják ki, hogy mi áll a kártyákon.)

Legközelebb párokban ülnek egymással szemben a gyerekek egy-egy kártyával, és felváltva mondják, hogy melyik számot próbálják ki mindketten. A végén össze is hasonlítják, hogy melyik pár találkozott kevesebb lépés után.

A ,,Fogócskát'' nem alsó tagozatos gyerekeknek kínáltam először, hanem – kicsit bonyolultabb kifejezésekkel – főiskolásoknak. Azt vettem észre, hogy egy már beidegzett, jól működő egyenletmegoldási módszer ismeretében nem szívesen járják végig a hosszadalmasabb,

több gondolkodást igénylő másikat, a tervszerű próbálgatást. Ha pedig nem járják végig, nem érthetik meg igazán, hogy mi is az eljárás lényege, nem élik meg, hogy miféle gondolati lépéseket végez az a gyerek, akinek az egyenletben szereplő kifejezések nem könnyen kezelhető függvényei a bennük szereplő változónak. Nem érthetik meg pedagógiai hasznát annak az útnak, amit maguk csak felületesen tudnak végiggondolni.

A hallgatók is érdeklődéssel vettek részt a játékban. Ennek ellenére azt tartom valószínűnek, hogy igazán csak akkor fogják megszeretni, ha a saját tanítványaiknak szerezhetnek vele hasznos örömet.

Általánosabb gondolatok

Fejlesztő – nevelő – oktató munkánknak különféle eredményei lehetnek. Némelyik tevékenységünkkel (beszélgetéssel, közléssel, előadással, magyarázattal, megmutással, ...) **tény-ismereteket** nyújtunk, miközben egy összetettebb hatásmechanizmus révén valószínűsítjük, hitelessé, rokonszenvessé, vagy néha éppen ellenszenvessé, (esetleg hihetetlenné) tesszük mondanivalónk mélyebb összefüggéseit. Lehet, hogy valamilyen **eljárásokat tanítunk meg**, az egyszeri közvetítés helyett a begyakorlásra, bevésésére alkalmazásra is sort kerítve. Ezzel is együttjár egy ,,értékrend-átadás''. Az, hogy mi magunk mennyire tartjuk fontosnak, hitelesnek, hasznosnak, az kiszínezheti, vagy átszínezheti szavaink tartalmát. Ettől függően hat pozitívan vagy negatívan mondanivalónk a befogadóra. Ettől függően fejleszt, vagy okoz kárt, esetleg csak azzal, hogy közömbössé tesz.

Pedagógiai tevékenységünk jelentős részének azonban nemcsak rejtetten, félig-meddig tudattalanul vagy másodlagosan szerepe **a ránk bízott gyerekek fejlesztése**, hanem éppen ez a tudatos, határozott célunk. Tartalma szerint ennek a tevékenységnek is vannak ismeret-elemei. Mégis pontosan tudjuk, hogy nem egy adott ismeretelsajátítás ad irányt munkánknak. Sokkal inkább egy szemlélet kimunkálása, gondolkodásmódok, kutató magatartásformák, gondolkodási képességek alakítása, személyiség-gazdagítás, alkotóképességek aktivalizálása, fejlesztése – a kutató, gondolkodó, problémamegoldó, alkotó tevékenységek sokszori bejáratása által.

Az alsó tagozatos matematikatanításban – ha pontos arányát nehéz is lenn meghatározni – döntő szerepük van azoknak a helyzeteknek, tevékenységeknek, amelyek funkciója a fejlesztés, és viszonylag ki hányadban találunk kifejezetten és kizárólagosan tény- vagy eljárásismeret célú mozzanatokat. (Ennek magyarázatát most nem elemzem.) Ezzel a hangsúly-áthelyeződéssel magyarázható, hogy sok esetben jól ismert és bevált, régóta szokásos matematikai eljárásokat, módszereket (néha még fogalmakat is) valami egészen másfélére cserél az alsós tanterv.

Példaként egyetlen területtel foglalkozom.

Matematikai gondolatok

Az 1978-tól érvényes ('87-es korrekcióval pontosított, módosított) tanterv bevezette a **nyitott mondat fogalmát**. A fogalom pontos tartalmát – köznapi formában – a következőképpen adhatjuk meg.

Adunk egy mondat-formát, amely állít valamit, de nem árulja el, ,,nyitva hagyja'', hogy ki(k)ről, mi(k)ről szól az állítása. Megadunk hozzá minden olyan személyt, tárgyat, jelenséget, formát, fogalmat, jelet, ... amelyre vonatkoztatni akarjuk az állítást. Ha a mondatformát ,,lezárjuk'' azzal, hogy egyenként belepróbáljuk az ,,alanyokat'', akkor vagy igaz állításhoz, vagy téves állításhoz jutunk.

A nyitott mondatok problémát, kérdést közvetítenek. Megoldásuk a szóbajöhető dolgok szétválogatását jelenti aszerint, hogy melyektől lesz a lezárt mondat igaz, melyektől nem. Akkor mondjuk, hogy **megoldottunk egy nyitott mondatot, ha pontosan meghatároztuk ezt a szétválogatást, ha tehát**

Példák:

1. *Mondat-forma:* *A szóbajöhető alanyok:*

A ..... madár veréb, véreb, fecske, kecske, rugó, rigó

Lezárt mondatok:		igazságértékük:
A veréb madár.	.....	igaz
A véreb madár.	.....	téves
A fecske madár.	.....	igaz
A kecske madár.	.....	téves
A rugó madár.	.....	téves
A rigó madár.	.....	igaz

2. *Mondat-forma:* *A szóbajöhető alanyok (számpárok):*

A Δ kettővel nagyobb, mint a □. (8;6), (7;2), (3;4), (4;2), (10;12)

Lezárt mondatok:	igazságértékük:
A 8 kettővel nagyobb, mint a 6.	igaz
A 7 kettővel nagyobb, mint a 2.	téves
A 3 kettővel nagyobb, mint a 4.	téves
A 4 kettővel nagyobb, mint a 2.	igaz
A 10 kettővel nagyobb, mint a 12.	téves

megadtuk, elkülönítettük az igazsághalmazát.

A nyitott mondatok speciális, 3-4. osztálytól különlegesen fontos fajtái az egyenletek és az egyenlőtlenségek.

Bizonyos egyenletek, egyenlőtlenségek megoldására igen régóta vannak jól használható, ügyes eljárások. (Néhány bonyolultabb egyenlet megoldására is léteznek általános módszerek, de igen sokféle van, amellyel kapcsolatban csak komolyabb matematikai apparátussal lehet megoldáshoz jutni.)

Az **egyismeretlenes, elsőfokú egyenletek megoldásának** – amilyenekről most szó lesz – két algebrai módszerét szoktuk megtanítani fölső tagozaton. A két eljárás minden egyes lépésében új nyitott mondatra cseréljük a megelőző nyitott mondatot úgy, hogy mindig ugyanaz maradjon az igazsághalmazuk. Az egyenletek formája egyre egyszerűbbé, átláthatóbbá válik, míg az utolsó nyitott mondatról közvetlenül olvasható le az igazsághalmaza.

A **lebontogatás** logikája nyitott mondatokkal végzett következtetések láncolata.

Észre kell venni, hogy a 4 mind a négy nyitott mondathoz az az egyetlen szám, amely igazzá teszi őket. ($4 = 4$; $4 \cdot 13 = 52$; $4 \cdot 13 - 38 = 14$; $(4 \cdot 13 - 38) / 2 = 7$).

A másik módszer a **mérlegelven** alapszik. Arra hivatkozva térünk át egy-egy nyitott mondatról a másikra, hogy az egyenlőség továbbra is igaz marad, ha mindkét oldalra ugyanannyival nagyobb (kisebb) számot írunk, vagy mindkét oldalra ugyanannyiszor nagyobb (kisebb) szám kerül.

Például:

$(□ \cdot 13 - 38) / 2 = 7$	Van egy szám a zárójelben. Ennek fele 7. Tehát a zárójelben álló szám a 14.
$□ \cdot 13 - 38 = 14$	A $□ \cdot 13$-nál 38-cal kisebb a 14. A $□ \cdot 13$ tehát 38-cal nagyobb a 14-nél: 52.
$□ \cdot 13 = 52$	Egy számnak, a □-nek 13-szorosa 52. A szám tehát az 52 tizenharmad része: 4
$□ = 4$	

Például:

$(223 - \square) / 3 = \square \cdot 4 + 18$	Szorozzuk meg először mindkét kifejezést 3-mal. Ha egy szám igazzá teszi az eredeti egyenletet, az az így kapott egyenletet is igazzá teszi, és fordítva.
$223 - \square = \square \cdot 12 + 54$	Vegyünk el mindkét oldalról 54-et, az egyenlőség továbbra is ugyanazoknál a behelyetesített számoknál fog fennállni, mint az előbb.
$169 - \square = \square \cdot 12$	Adjunk mindkét oldalhoz □-t!
$169 = \square \cdot 13$	Végül osszuk el mindkét oldalt 13-mal!
$13 = \square$	

Érdemes kipróbálni, hogy a 13 mind az öt nyitott mondatot igazzá teszi, és más szám egyiket sem teszi igazzá.

Szembetűnhet ebben a jól ismert megoldási eljárásban, hogy bár a lépések logikai hibátlanságában nem jut eszünkbe kételkedni, célszerűségét igencsak nehéz néha jól megértetni. Miért éppen ezeket a változtatásokat hajtsuk végre, s miért nem valami egészen mást?

Az alsó tagozatos '87-es matematika-tanterv más módszert javasol az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásának megkeresésére az előbbiek helyett. Az eljárást **„tervszerű próbálgatásnak"** vagy **„közelítésnek"** szokták nevezni.

A tervszerű próbálgatás lényege az, hogy egy előzetes becslés után „találomra" veszünk egy számot. Ezt beírjuk a nyitott mondat keretjébe (behelyettesítjük az ismeretlent jelölő betű helyébe), és megfigyeljük, hogy milyen szám áll az = (vagy <, >) jel két oldalán. A két kapott számérték összehasonlítása után ugyanebbe a nyitott mondatba másik számot „próbálunk bele", és azt figyeljük, hogy közeledett-e a két érték egymáshoz. A fokozatos közelítést annál ügyesebben (annál kevesebb lépésben) tehetjük meg, mennél jobban érezzük, értjük, hogy a behelyettesített számtól függően hogyan változik a két oldalon álló kifejezés értéke.

Lássunk egy példát!

$$1066 + \square \cdot 7 = 3172 - \square \cdot 2$$

1. *Becslés:* 1066-hoz körülbelül 2000-et adhatunk, hogy kb. 3000-et kapjunk. Ha a

   □ · 7 kb. 2000, akkor a □-t 300 közelében kereshetjük.

2. *Próbák:* Próbáljuk ki 300-at!

$$\underbrace{1066 + \underbrace{300 \cdot 7}_{2100}}_{3166} > \underbrace{\underbrace{300 \cdot 2}_{600}}_{2572}$$

téves állításhoz jutottunk.

Nemcsak azt látjuk, hogy a 300 tévessé tette az állítást, hanem azt is, hogy ez túl nagy szám. Ha ennél kisebb számot írunk a keretbe másodszorra, akkor a baloldal kisebb lesz tőle (mert: a kisebb szám hétszerese is kisebb, ezt adva az 1066-hoz, az összeg is kisebb lesz). A jobboldal viszont nőni fog, mert a 3172-ből kisebb számot veszünk el, a különbség nő.

Próbáljuk ki a 200-at!

$$\underbrace{1066 + \underbrace{200 \cdot 7}_{1400}}_{2466} < \underbrace{\underbrace{200 \cdot 2}_{400}}_{2772}$$

téves állítást kaptunk.

Most a jobboldali kifejezés értéke lett a nagyobb. Menjünk kicsit visszafelé! Nem is a 250-et érdemes kipróbálni, mert a 200-zal egymáshoz közelebbi számértékeket kaptunk, mint a 300-zal.

Harmadszor próbáljuk ki a 230-at!

$$\underbrace{1066 + \underbrace{230 \cdot 7}_{1610}}_{2676} = \underbrace{3172 - \underbrace{230 \cdot 2}_{460}}_{2712}$$

téves, de még közelebb került a két szám.

A két szám között most már csak 36 a különbség, és újra a jobboldali szám a nagyobb. Növelni kell tehát a kipróbált számot, de még óvatosabban, mint az előbb.

Próbáljuk a 232-t!

$$\underbrace{1066 + \underbrace{232 \cdot 7}_{1624}}_{2690} < \underbrace{3172 - \underbrace{232 \cdot 2}_{464}}_{2708}$$

téves.

Az eltérés 18-ra csökkent, az előző különbség felére. Az a sejtésünk, hogy újabb 2vel való növeléssel megtalálhatjuk a ,,jó'' számot.

Próbáljuk a 234-et!

$$\underbrace{1066 + \underbrace{234 \cdot 7}_{1638}}_{2704} = \underbrace{3172 - \underbrace{234 \cdot 2}_{468}}_{2704}$$

igaz állítást kaptunk.

3. Ellenőrzés: nincs-e még más ,,jó'' szám?

Könnyen átláthatjuk, hogy a 234-nél akármennyivel nagyobb számot írunk a keretbe, a baloldalon álló szám nagyobb lesz 2704-nél, a jobboldali pedig kisebb: a nagyobb számok között nem lesz több, ami igazzá tenné az egyenlőséget. Ugyanígy, csak ellenkező irányban távolodik a két oldal értéke egymástól akkor is, ha 234-nél kisebb számokat írunk a keretekbe. A baloldal ugyanis egyre kisebb, a jobboldal pedig egyre nagyobb lesz.

Második példánkként keressük most a megoldását a természetes számok között egy egyenlőtlenségnek!

$$\square \cdot 12 - 496 < 496 + \square / 3$$

1. *Becslés:* 100 körül próbálkozzunk először, mert így mindkét oldalon százas nagyságrendű számot kapunk: 500 és 1000 közötti lesz mindkét kifejezés értéke. A 100 közelében a 90 osztható 3-mal, legyen ez az első szám!

2. Próbák:

$$\underbrace{\underbrace{90 \cdot 12}_{1080} - 496}_{584} < \underbrace{496 + \underbrace{90 / 3}_{30}}_{526}$$

téves.

A 90 túl nagy. Válasszunk kisebb 3-mal osztható (kerek) számot. Körvetkezzen a 60!

$$\underbrace{\underbrace{60 \cdot 12}_{720} - 496}_{224} < \underbrace{496 + \underbrace{60 / 3}_{20}}_{516}$$

igaz.

A 60 igazzá tette a nyitott mondatot, hozzátartozik a megoldáshoz (igazsághalmazhoz). Sejthetjük, hogy lesz még jó szám. Határozott kijelentést is megfogalmazhatunk: a 60-nál kisebb számok mind igazzá teszik az állítást. A baloldali szám ugyanis 12-vel lesz kisebb, ha eggyel kisebb számot írunk a keretbe, a baloldali pedig csak 1 harmaddal, tehát a baloldal gyorsabban csökken, mint a jobboldal, ezért mindig a jobboldal ,,alatt'' marad.

Mi a helyzet a 60-nál nagyobb számokkal?

A 90-ről már tudjuk, hogy nem tartozik az igazsághalmazba. Az előbbi gondolatmenet alapján az is igazolható, hogy a 90-nél nagyobb számok erősebben növelik a baloldalt, mint a jobbot, tehát változatlanul téves marad az állítás.

60 és 90 között azonban még biztosan találunk ,,jó'' számokat, mert a 60 beírásával nagyon távol volt a két szám egymástól: a 224 sokkal kisebb, mint az 516.

Megtehetnénk – joggal –, hogy 60-tól egyenként növelve a beírt számot, mindegyiket kipróbálnánk addig, amíg téves állításhoz nem jutunk. Vagy a 90-től visszafelé lépegetve keresnénk meg az első jó számot. Most azonban járjunk végig egy másik gondolatmenetet, amit általában nem követnek tudatosan az alsó tagozatos gyerekek, de jó intuícióval és kellő gyakorlat alapján mégis hasonló úton járnak.

A 60 behelyetesítésével nyert 224 az 516-nál 292-vel kisebb. Ha a beírt számot 3-mal

növeljük, akkor nő 1-gyel a jobboldal, és ekkor 3-szor 12-vel, 36-tal nő a baloldal. Ezáltal tehát a két oldalon álló számok különbsége 35-tel csökken.

□	baloldal		jobboldal
60	224	<	292	516
63	260	<	257	517

Ismét 3-mal nagyobb számtól ugyanígy változik az egyenlet két oldalának értéke, újabb 35-tel csökkentve a különbséget:

66	296	<	222	518

Annyiszor léphetünk még 3-mat a 66-tól fölfelé, ahányszor 35-tel csökkenthető a különbség, hogy a baloldalon még kisebb maradjon a kifejezés értéke a jobboldalinál. A 222-ben 6-szor van meg a 35; 6-szor 3-mal, 18-cal növeljük még a 66-ot!

$$66 + 18 = 84$$

Próbáljuk ki a 84-et!

$$\underbrace{84 \cdot 12}_{1008} - 496 < 496 + \underbrace{84 / 3}_{28}$$

$$512 \qquad 524$$

igaz.

Innen már csak 1-gyel növeljük a beírt számot:

$$\underbrace{85 \cdot 12}_{1020} - 496 < 496 + \underbrace{85 / 3}_{28\text{-nál nagyobb}}$$

$$524 \qquad 524\text{-nél nagyobb (1 harmaddal)}$$

igaz.

(Még eggyel növelve, a baloldal már a jobboldal fölé nő.)

Megtudtuk tehát, hogy a nyitott mondat megoldása a természetes számok között az összes 86-nál kisebb szám.

Vessük össze a most leírt eljárást az előbb említett lebontogatással és mérlegelvvel! Az előbbieknek tagadhatatlan előnye, hogy lényegesen gyorsabb, több részlete automatizálható. Ez indokolja, hogy „felhasználói" szemmel értékesebbnek, hasznosabbnak kell tartanunk, s ezért jogos igény, hogy felső tagozaton azokat is ismerjék, tanulják meg a gyerekek.

A tervszerű próbálgatásban azonban az út végigjárása olyan sokirányú fejlesztést szolgál, ami kívánatossá teszi választását az alsó tagozaton.

Vegyük sorra a tervszerű próbálgatásos módszer erényeit a másik két eljárással szemben!

1. Rendkívül fontos szempont, hogy az eljárás minden mozzanatát az **a cél irányítja**, hogy megkeressük a nyitott mondat igazsághalmazát. A mérlegelv követésében és a lebontogatásban ezt a célt sajnos sokszor váltja fel az **a kötelezettség**, hogy „... most ezt kell tennem, ... aztán meg azt, ... és a végén „kijön" ". Ha gondolkodási képességeinkhez, szokásainkhoz mérten túlságosan korán tanulják azokat az eljárásokat, akkor esetleg csak az vezérli a gyerekeket, hogy az algoritmust jól hajtsák végre. A jó tanár rászoktatja ugyan tanítványait az ellenőrzésre: valóban igaz lesz-e a nyitott mondat attól, ami „kijött", de ezt még a jó képességűek sem veszik általában nagyon komolyan (főképpen, ha bíznak benne, hogy nem rontottak el közben egy lépést sem). Arra elég későn látnak kis számú és kevés típusú példát, hogy gyökvesztés, vagy hamis gyök fellépése igazán indokolttá teszi az ellenőrzést.

A céltévesztés másik oka az, hogy a módszer tanulása idején egészen jól nem értik meg sokan az eljárást. Ennek a nehézségnek a leküzdése éppen elegendő erőfeszítést igényel ahhoz, hogy számukra közben veszítsen fontosságából az eredeti cél.

2. A módszerünk második előnye a másikaknál **lényegesen általánosabb használhatósága.** A leírtak alapján – első közelítésben – azt mondhatjuk, hogy mindig alkalmazható, amikor tájékozottak vagyunk arról, hogy miképpen változik a két kifejezés a beírt, behe-

lyetesített értékek változásától. (A ,,Fogócska'' játék igazolja, hogy ehhez még a kifejezések alakjának tényleges ismerete sem szükséges, sőt éppen a módszer használata irányíthatja a figyelmet arra, hogy ez a változás milyen kapcsolatban van a kifejezés ,,formai'' jegyeivel.)

A másik két módszer ennél korlátozottabban használható.

3. Az előnyök között kell megemlíteni azt a **logikai egyszerűséget és tisztaságot**, ami 8-10 évesek számára is kezelhetővé teszi a módszert. A megválasztott számot behelyettesítjük, és a lezárt mondat igazságáról döntünk. Az újabb szám megválasztásához pedig csak azt kell eldönteni, hogy a kisebb vagy a nagyobb szám behelyettesítésével közeledik-e a két érték egymáshoz.

A másik két algoritmust az teszi logikailag nehézzé, hogy minden lépésben következtetést kell végrehajtani, mégpedig nyitott mondatok körében. Úgy kell (logikai úton) meghatározni egy, az előzővel azonos igazsághalmazú nyitott mondatot, hogy közben ez az igazsághalmaz még nem ismert. A kipróbálás lehetősége nélkül csak a lépések helyessége lehet a biztosíték, hogy ugyanazt az igazsághalmazt tartjuk a kezünkben. Másrészt a lépések célszerűségét is nehéz megérteni.

4. Végül foglalkozzunk azzal az előnnyel, **ami egy út szabad, akár ki kitérőkkel való bebarangolásából származhat** egy túlszabályozott, falakkal határolt, szűk, de rövid úton való céltudatos meneteléssel szemben. Ez utóbbival megtanul valamit a gyerek: az adott út szabályos végigjárását. Az előbbi ugyanúgy célhoz vezet, de a cél elérésénél is többet ér **sokirányú fejlesztő hatása.**

Fejleszti a gyerekek **számolási készségét**, hiszen egy-egy műveletsort sokszor kell végigszámolni más-más behelyettesített számmal. A számolási készségek közül is különösen sokszor kell használni benne a legfontosabbakat: **a pontos és a közelítő ,,fejszámolást''**. Csak akkor számolnak már írásban, esetleg zsebszámológéppel, ha kerek értékekkel elég közel kerültek a megoldáshoz, és becsléssel nem lehet biztonságosan dönteni az állítás igazságáról. A számolás célszerű pontossággal való elvégzéséhez minden esetben szükség van az eredmény előrebecslésére. Eközben kedvezően formálódik a tanulók **számérzete**, a számok nagyságrendjének helyes megítélése. Igen fontos **összefüggéslátásra** támaszkodik a kiszámított (becsült) eredmények értékelése, amely alapján megválasztják a következő számot. Például az első elemzett nyitott mondat jobb oldalán álló kifejezésben egy szorzás és egy kivonás szerepelt:

$$3172 - \square \cdot 2$$

Ha ezt növelni szeretnénk, alkalmazás-szinten kell tudnunk, hogy a keretbe írt szám növelésével a kétszerese is nő, csökkentésével a kétszerese is csökken. Tudni kell, hogy a különbség akkor lesz nagyobb, ha kisebb számot veszünk el. Tehát a keretbe az előbbinél kisebb számot kell írni. Annak megítéléséhez pedig, hogy 1-gyel, 10-zel, vagy éppen 700-zal kisebb számot érdemes-e kipróbálni, azt kell látni, hogy 1-gyel csökkentve a keretbe írt számot, a kifejezés értéke 2-vel nő, 10-zel kisebb szám behelyettesítése 20-szal nagobb eredményre vezet, 700-zal kisebb szám pedig 1400-zal növeli a kifejezés értékét.

Ez a mérlegelésekből és döntésekből álló folyamat: **adott függvények konkrét tapasztalatokra épülő vizsgálata.** Még akkor is szolgáljuk vele a függvényszemlélet jó kialakulását, ha nem beszélünk függvényekről, monotonitásról, növekedésről, csökkenésről, vagy a változás sebességéről (a függvény meredekségéről). Nem alakítunk ki vele a függvényekről szóban számonkérhető ismereteket, de megteremtjük azt a tapasztalati bázist, ami érthetővé és megtanulhatóvá teszi a témához tartozó későbbi ismereteket, összefüggéseket.

Gondolatok a tanító munkájáról

A jó tanító mindig tudta és tudja,hogy nagyon sokat tehet a rábízott gyerekekért. Az is nyilvánvaló, hogy maradandó értéket az jelent a kisdiákok számára, ami beépül szemlé-

letükbe, élményvilágukba, gondolkodásmódjukba – ami gazdagítja személyiségüket.

Néha azonban mégis más – könnyebben kimutatható – eredményei alapján ítélik meg a tanító munkáját. Egy-egy ismeretről ugyanis könnyebb számot adni, egy-egy készséget könnyebb megmérni, mint felismerni a tagadhatatlanul átfogóbb, hatékonyabb képességek fejlődését. Ha mégis sikerül megragadni, akkor sem mindig nyilvánvaló, hogy miféle pedagógiai hatásoknak köszönhető ez a fejlődés.

Csak mélyrehatóbb elemzések mutathatnák ki, miféle mozzanatok segítik, és mifélék befolyásolják károsan a probléma-érzékenységet, az összefüggés-felismerő képességet, a gondolkodás eredetiségét és rugalmasságát; egy matematikai téma iránti fogékonyságot, vagy az általánosabb érdeklődést, nyitottságot, befogadó-készséget, az alkotó képességet. Esetleg csak tudomásul veszi a fölsős tanár, hogy ,,okosak'' a gyerekek. És a tanító titka marad – talán még tanítványai előtt is –, hogy mennyi hitet, tudást, iránt való érzékeny figyelmet kaptak ajándékba, amikor ,,nem is tanultak semmit az elmúlt órán''. Csak játszottak.

Somfai Zsuzsa

Hatévfolyamos gimnáziumi kísérlet a budapesti Eötvös József Gimnáziumban

Az utóbbi években a gimnáziumok többsége tudatosítja és megfogalmazza a maga számára azt a felismerést, hogy az átlagosan képző középfokú oktatás elterjesztésével, az ilyen irányú társadalmi igény fokozott megjelenésével kettős szorításban kell feladatait megoldania. Nyílik az olló az általános iskolából érkező diákok készségei, tudása, munkára hangoltsága, valamint az egyetemek főiskolák, ill. a társadalomnak az érettségizettekkel szembeni elvárásai között. Ez a gimnáziumban tanító pedagógusoknak komoly feszültséget okoz. A helyzet megoldására való törekvés a jelenleg érvényes tantervek okozta túlterhelést sok esetben még fokozza, azokban az iskolákban pedig, ahol sok a rossz munkafegyelmű, érdektelenséget mutató diák, keserű tehetetlenséget érezhet a tanár.

A hatévfolyamos gimnázium előnyeit abban látjuk, hogy a gyerekek 12-18 év közötti fejlődése sokkal hatékonyabbá válik, ha ezt az időszakot ugyanabban az iskolában töltik el, hasonló érdeklődésű, mégis színes emberi környezetet biztosító társak között.

Németh László felfogásával egyetértve úgy véljük, hogy az iskolaváltás szempontjából mind az oktatást, mind a nevelést tekintve természetes határ a 12 éves életkor: ,,Alsóbb és felsőbb fokú oktatás közt a természetes határ a 12 év. A hatosztályos elemi a gyermeki műveltséget építi fel, a hatosztályos középiskola – a serdüléssel meglódult erőkkel a felnőttet.'' (*Németh László:* A kísérletező ember)

A jelenlegi nyolcadik osztály második félévében a gyerekek – annak tudatában, hogy felvették őket egy gimnáziumba – nem tanulnak kellő intenzitással. Ezt az elpocsékolt időt a hatévfolyamos gimnázium egyértelműen a fejlődésük szolgálatába tudja állítani.

Sokszor tapasztaltuk diákjainál, hogy amit az egyik tantárgy óráin megtanultak, a másik tárgy keretein belül nem ismerik fel. Az is komoly gond, hogy a különböző tantárgyak anyagában szereplő, de tartalmilag egymásra épülő ismeretek időben nem megfelelő helyen vannak (pl. magyar-történelem, matematika-fizika). Sokszor az ilyen tantárgyak nem, hogy nem segítik, erősítik egymást, hanem ha a tanár nem elég körültekintő, inkább összekuszálják a tanulók ismereteit. Mindez a minimálisra szorítható a hatévfolyamos gimnázium tantervében, valamint nagyon jól kihasználhatók a tantárgyi koncentrációban rejlő lehetőségek.

A jelenlegi tantervben lévő felesleges átfedések megszüntetésére szintén jó kínálkozik, elsősorban a tanulók felesleges túlterhelésének csökkentése szempontjából.

A hatévfolyamos szisztéma óratervünkben a tantárgyak többségénél egy évi óraszám megtakarítását eredményezi a jelenlegi óratervekhez képest. Az ilyen értelemben órákat veszítő tantárgyak kieső óraszámát csoportbontással kompenzáljuk.

A tantervek engedélyezéséhez a minisztérium többek között azt a feltételt szabta 1991-ben, hogy az érvényben kévő tantervi anyagnak szerepelnie kell a tervezetben.

Alaposan meg kellett gondolniuk, hogy mely tárgyak engedik meg a lineáris tananyagfelépítést, és melyek azok, amelyeknek továbbra is a spirális építkezés elvét kell követniük.

Az érvényben lévő tantervhez hasonló célokat fogalmaztunk meg a matematika tantervi tervezetében. Talán kiemelném ezek közül az önálló kreatív, logikus gondolkodásra, önellenőrzésre nevelés feladatát, mert az egész hatévfolyamos gimnáziumi kísérletünk egyik legfontosabb céljának tartjuk, hogy a iskolából a jelenleginél szellemileg és fizikailag felkészültebb, egészségesebb, nyitottabb, gondolkozni és tenni képes érettségizettek kerüljenek ki.

A matematika tanterv összeállításakor a következő alapelveket követtük:

A tervezet alapjaiban igyekszik megtartani a spirális tananyagfelépítést, mert a matematikai gondolkodás fejlesztéséhez ezt tartjuk megfelelőnek. 12 éves kor után is lényeges, hogy a pontos, elvont matematikai fogalmak, ismeretek kialakítását előzze meg egy szemléletre támaszkodó, sok tapasztalatot nyújtó szakasz.

A felesleges átfedésnek mutatkozó témakörök összevonásával a jelenlegi hetedik és nyolcadik osztály, valamint az első gimnázium anyagában tudunk időt megtakarítani, ami lehetővé teszi, hogy a mostanihoz képest bizonyos részek előbbre kerüljenek.

Erre elsősorban a többi tantárgy, főleg a fizika anyagával való koncentráció szempontjából volt feltétlenül szükség.

Összeállításunk néhány kivételtől eltekintve a mostani tanterv törzsanyagát tartalmazza.

Szem előtt tartottuk a most érvényben lévő követelményeket a hetedik és nyolcadik osztályban. A felsőbb évfolyamokon a követelményeket a jelenlegi gimnáziumi tanterv egyes témaköreinél megfogalmazottak változtatása nélkül vettük át.

A matematika heti óraszáma evfolyamonként:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
4	3	3	3	3	3

A tárgyat minden évfolyamon csoportbontással fogjuk tanítani. Az első két évben egységes alapozó képzést adunk. Két év után választható egy ún. reál tagozat, ahol a matematika óraszámok a megjelöltnél magasabbak. Az erre vonatkozó részletes tanterveken most dolgozunk.

Aki nem választja a reál tagozatot, de később a matematikával elmélyültebben szeretne foglalkozni (mert pl. egyik felvételi tárgya lesz), az a negyedik év végén a matematikát is választhatja fakultációs tárgynak a jelenlegi gyakorlatnak megfelelően.

Az óraszám a mostani B fakultációval egyezik majd meg.

A hat év folyamán az egyes évfolyamokon a következő témák szerepelnek:

I. osztály

Halmazok, kombinatorika	18 óra
Változó mennyiségek kapcsolata, valószínűségszámítás	18 óra
Algebra	24 óra
Lin. egyenletek, egy. rendszerek	13 óra
Sorozatok	8 óra
Geomatriai transzformációk	24 óra
Háromszögek tulajdonságai	15 óra

II. osztály

Függvények és fv. transzformációk	10 óra
Síkidomok tulajdonságai, szerkesztése	20 óra
Testek tulajdonságai	15 óra
Algebra	20 óra
Egyenlőtlenségek	10 óra
Kombinatorika, valószínűségszámítás	9 óra

III. osztály

Számhalmazok, oszthatóság, műveletek algebrai törtekkel	20 óra
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek	15 óra
Ponthalmazok, halmazműveletek összefogl.	10 óra
Geometriai transzformációk és alk.	25 óra
Trigonometria	20 óra

IV. osztály

A számfogalom bővítése, az *n*-edik gyök	20 óra
Nevezetes síkidomok és tulajdonságaik	10 óra
A trigonometria alkalmazásai	25 óra
A függvénytranszformációk összefoglalása	10 óra
Kombinatorika	20 óra

V. osztály

Vegyes feladatok	12 óra
Hatvány és logaritmus	23 óra
Koordináta-geometria	30 óra
Számsorozatok	20 óra

VI. osztály

Kerület, -terület, -felszín -és térfogatszámítás	24 óra
A matematikai logika alapfogalmai	6 óra
Szabadon választott témakör	20 óra
Rendszerező összefoglalás	40 óra

A hat év tantervéből kiemelek néhány témakört, amelyiket a mostanihoz képest másképp építünk fel, vagy amelyik példázza spirális anyagfelépítésünk elveit.

A jelenlegi tanterv szerint a tanulók hatodik osztály végére tapasztalatokat szereznek az egyenletek megoldásának kérdésében. Hetedikben tanulják meg a mérlegelv alkalmazását lineáris egyenletek megoldásában, nyolcadikban ezt elmélyítik, és találkoznak az egyenletrendszerek megoldásával is. Nyolcadik végére követelmény, hogy egyenletet, egyenlőtlenséget tudjanak megoldani a mérlegelv alkalmazásával és grafikus úton. Szöveges feladatokat következtetéssel, egyenlettel vagy egyenlőtlenséggel oldanak meg. Első gimnáziumban az algebra anyagban mindezt újból tanítjuk, a paraméteres egyenletek az új anyag. A másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek algebrai és grafikus megoldása második gimnáziumi anyag.

Ennél a témánál úgy gondoltuk, hogy felesleges ismétlődések vannak, amit a hatosztályos tantervünkben megszüntettünk. E szerint első osztályban megtanítjuk a mérlegelv alkalmazását egyenletek megoldásában, valamint a lineáris egyenletrendszerek algebrai és grafikus megoldását. Harmadik osztályban kerül sor a másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek algebrai és grafikus megoldására, így a téma egy évvel hamarabb zárul le, mint a négyosztályos gimnáziumban. A fizika szempontjából ez különösen fontos. Úgy gondoljuk, hogy ezzel a felépítéssel nem sérül a fogalmak érlelésének fontos elve. Itt tehát az anyag felépítésének lineáris módját választottuk.

A kombinatorika téma jól illusztrálja, hogy akarunk feladatokkal, azok megbeszélésével sok tapasztalatot nyújtani az első évek-

ben anélkül, hogy az összeszámlálási típusokat megneveznénk, vagy képleteket tanítanánk. Az első osztályban azt várjuk el, hogy a tanulók tudjanak egyszerű kiválasztási problémákat, *konkrét* ismétléses permutációs feladatokat megoldani, ismerjék *n* különböző elem lehetséges sorrendjeinek számát. Második osztályban további leszámolási feladatokkal találkoznak, és egyszerű valószínűségszámítási példákat szerepeltetünk. Az a követelmény, hogy ismerjék fel a tanulók a konkrét kombinatorikus és valószínűségszámítási problémákat, tudják ezeket *megfogalmazni és megoldani.*

Negyedik osztályban szerepel újból a kombinatorika téma. Ekkor kerül sorra a véges halmaz részhalmazainak száma, a teljes indukció, a logikai-szita-formula, a skatulya-elv, valamint a leszámolási módszerek rendszerezése, képletek felírása. Ekkor rendszerezzük a valószínűségek kombinatorikus kiszámolási módjáról szerzett korábbi és újabb ismereteket, valamint megtanítjuk a binomiális együttható fogalmát és néhány tulajdonságát.

Meggyőződésünk, hogy az előkészítő szakasz feltétele annak, hogy az absztrakt tárgyalást a tanulók megértsék, valamint a képletek számukra felhasználásra alkalmas ismereteket jelentsenek.

A geometriában szinte minden témát kétszer szerepeltetünk. Az alsó évfolyamokon egy tapasztalatnyújtó, szemléletet megalapozó szinten, később rendszerezett, elvont formában.

Bízunk benne, hogy ezzel a felépítéssel valóban sikerül a cikk elején ismertetett céljainkhoz közel kerülni.

Van a tanterv felépítésének még egy fontos szempontja, amelynek teljesülése szintén feltétele volt a kísérlet engedélyezésének. Törekednünk kellett arra, hogy a tanulók számára lehetséges legyen a különböző szerkezetű iskolák között az átjárhatóság. Ez a mi döntően spirális felépítésű tantervünkkel megvalósul. Azok a tantárgyak viszont, amelyek jellegüknél fogva lineárisan építik fel az anyagot, gyakorlatilag nem tudnak ennek a követelménynek eleget tenni. Ilyenkor előfordulhat, hogy az egyik iskolából a másikba való átlépéskor a tanulónak különbözeti vizsgát kell tenni.

A budapesti Eötvös Gimnázium kísérleti osztályaiba három lépcsős felvételi után juthattak be az első két párhuzamos osztály diákjai. Azért volt erre szükség, mert nagyon sok volt a jelentkező, és minél igazságosabban akartunk dönteni.

Az első, ,,szűrő'' lépcsőben magyarból és matematikából írásbeli feladatokat oldottak meg a gyerekek. A második lépcsőbe továbbjutókat meghívtuk egy szombat délelőtti közös játékra és ismerkedésre. Ez után egy héttel következett a második forduló. Ekkor a tanulók az általuk megjelölt két tantárgyból dolgozatot írtak. Azt akartuk így megtudni, ki mennyire ,,tanítható'' a gyerekek közül. Az utolsó vizsga szóbeli a választott tantárgyból és tájékozódó beszélgetés.

Biztos, hogy kezdeti elképzeléseinket a munka során finomítani lehet, esetleg módosítani kell, de az első hónapok tapasztalatai azt támasztják alá, hogy a lényeget tekintve jó úton indultunk el.

Befejezésül közlöm az első írásbeli felvételi egyik matematika feladatlapját.

Kedves felvételiző!

60 perced van a feladatok megoldására. Ügyelj arra, hogy válaszaidat, állításaidat lehetőleg indokolnod kell. Jó munkát!

1. Az utolsó oszlop üresen levő helyeire írj 1-t, ha *A* a nagyobb, 2-t, ha *B* a nagyobb, *X*-et, ha *A* és *B* egyenlő!

A	*B*	
-3	-5	
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$	1	
$\frac{18}{80}$	0,2	
9	$5-[(+2)-(-3)]$	
$422 \cdot 633$	$211 \cdot 1266$	
2^7	8^3	

2. Három polcon összesen 52 könyv van. A legfelső polcon 2-vel több a könyv, mint a középsőn, a középső polcon pedig harmadannyi könyv van, mint a legalsón. Melyik polcon hány könyv található?

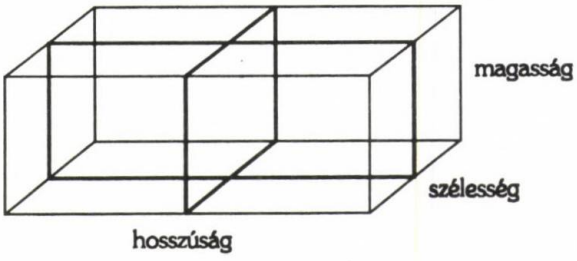
3. Az üresen hagyott oszlopba írd be, mit gondolsz az előtte lévő állításról!
biztosan igaz? lehet, de nem biztos? lehetetlen?

Egy ötre végződő számra gondoltam, így a gondolt szám biztosan osztható 5-tel.	
Összeszoroztam két egész számot, és 71,8-t kaptam.	

4. Az üres helyre írj 1, 2, vagy *X*-et aszerint, melyik oszlopban lévő válasz helyes!

	1	2	*X*	
Milyen háromszögre igaz, hogy bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál?	csak hegyesszögű	csak derékszögű	minden	
Derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 22,5°. Hány külső szöge hegyesszög?	0	1	2	
Milyen háromszögre igaz, hogy bármely szöge kisebb a másik két szög összegénél?	csak hegyesszögű	csak derékszögű	csak tompaszögű	

5. Egy csomagot az ábrán látható módon kötöttek át, és a csomózást nem számítva 2,6 m zsineget használtak fel. A doboz szélessége fele a hosszúságának, a magasság pedig a szélesség háromszorosánál 20-cm-rel hosszabb. Add meg a doboz méreteit!



6. Peti gondolt egy számot, és négy dolgot állított róla:
A szám osztható 2-vel.
A szám osztható 4-gyel.
A szám osztható 8-cal.
A szám osztható 16-tal.
Tudjuk, hogy Peti két állítása volt igaz, kettő pedig nem. Melyik volt az igaz állítás?

Dr. Benkő József

„Rendezett" és „rendezetlen" összegzés I.

Kézkézen forgó, középiskolai tanulóknak szóló példatár kéri: „mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ sor tagjai nem csoportosíthatók tetszőleges sorrendben", útmutatásként pedig az áll, hogy a „pozitív és negatív tagok összege külön-külön a végtelenhez tart, ám a sor konvergens". E feladat s a hozzá fűzött magyarázat egy igen fontos kérdést feszeget, de nézetünk szerint egy járatlan „novicius" sem a ködösen fogalmazott kijelentést, sem a hozzá fűzött sommás útbaigazítást nem értheti meg. A szóvátett homályosságot az okozza, hogy sem a „csoportosítás", sem pedig a „sorrend" fogalomköre nem tisztázott. Az világos, hogy az első az asszociativitást idézi, míg a másik a kommutativitásra utal, de tudottan e két tulajdonság egymástól független, tehát összekapcsolásuk szerencsésnek nem mondható. A feladat valóban azt kívánja példázni, hogy a véges összegekre érvényes asszociativitási és kommutativitási törvények nem terjeszthetők ki a végtelen összegekre. Ez lehet meglepő, de lehet nagyon természetes is; attól függ, hogy a „végtelen összeget" hogyan definiáljuk. Ha például az $a_0 + a_1 + \ldots + \ + a_n + \ldots$ végtelen összegen a $\lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + \ + \ldots + a_n)$ határértéket értjük, akkor egy más sorrend, mondjuk az $a_{k_0} + a_{k_1} + \ldots + a_{k_n} + \ldots$ esetén a $\lim_{n\to\infty}(a_{k_0} + a_{k_1} + \ldots + a_{k_n})$-nek lehet, hogy semmi köze sincs az előzőekhez s így a kommutativitási elvárásaink teljesen alaptalanok. Az ilyen típusú ún. sorösszegzéskor az összeadandókat először sorba szedjük, ezekkel képezzük az $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ részletösszegeket, majd határátmenetet hajtunk végre. Ezen a vonalon haladva világos, hogy az összegezendő számok hozzájárulása (pontosabban: befolyása) a végösszeghez függ mind a szóban forgó szám értékétől, mind pedig a sorra kerülés pillanatától. Az összegben érvényre jut (számszerű értéket ölt) az a (sor-)*rend*, amelybe az összeadandókat szedtük; ebben az értelemben a sor-összegzés „rendezett" jellegű. Szemléletesen, „helyértékes" összegezésnek mondhatnánk és analógiaként felemlíthetnénk a betűk helyértékét a szavakban, a hangokét a dallamban, a számjegyekét a tizedestört alakban felírt számokban, az egyénekét a különféle társadalmi pozíciókban.

Mielőtt már-már lemondanánk a véges összegek szép és hasznos tulajdonságainak kiterjesztéséről, fordítsuk meg a kérdésfeltevést, gyanúsítsuk meg a sor-összegzés *módszerét* azzal, hogy ő tüntette el a szóban forgó tulajdonságokat, és keressük az összegzésnek egy olyan módját, amely a véges összegzéshez jobban kötődik. Ilyen eljárás valóban létezik, éspedig az ún. rendezetlen (feltétel-nélküli) összegzés. E dolgozat azt vállalja fel, hogy a fentebb jelzett kérdéseket szabatosan megfogalmazza, példákkal illusztrálja, és két mikro-elmélet (a sor-, ill. rendezetlen összegzés) keretei közt megválaszolja. Mivel a problémák elég kényesek, ezért fontos a szóhasználat és jelölés pontossága, valamint az alapozásra felhasznált fogalom és eredménytár. Ezt tartalmazza az első és részben a második is. Habár a sorok elmélete bármely tankönyvben megtalálható, az itt felsorolt eredmények és azok csoportosítása – az asszociatív, ill. kommutatív törvény körül – eltér a szokottól. A rendezetlen összegzés jórészt a funkcionálanalízis könyvekben „ad hoc" módra merül fel, főképp a kis lp tereknél és a konvolúciós szorzással kapcsolatosan. Mivel az egyedi akkor példás, ha benne ismerhető fel a sajátos-általános kereszteződése, ezért a *részben* tükrözött *egészet* nyomon követő mikroelméletek tanulmányozása a mélyebb megértés nélkülözhetetlen módja; ennek

mind a tanár, mind az érettebb diák csak hasznát láthatja.

A sor-összegzés

Az analízis egyik feladata a véges összegek kiterjesztése végtelenekre. E feladatot, a megszámlálhatóan végtelen halmazokra, több módon is megoldhatjuk. Az egyik eljárás, az ún. sorösszegzés igen egyszerű, de hátránya, hogy az összeadás tulajdonságait nem őrzi meg. A másik, az ún. rendezetlen-összegzés, szűkebb körben alkalmazható, de előnye, hogy a kommutativitás és asszociativitás maradéktalanul érvényesül. Mivel a sor-összegzés minden analízis könyvben megtalálható, ezért pusztán a definíciókra és az alaptulajdonságok felsorolására szorítkozunk. Lényeges mondanivalónkat a rendezetlen-összegzéssel kapcsolatosan a következő pontok tartalmazzák. Lássuk a sorokkal kapcsolatos tudnivalókat!

Adott $a = (a_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat elemeivel képezzük az $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ ún. n-ed rendű részlet-összeget; ezek (s_n) $(n \in \mathbf{N})$ sorozatát az (a_n) $n \in \mathbf{N}$ sorozatból képzett sornak mondjuk és hagyományosan az $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ vagy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ szimbólummal jelöljük; tehát $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = (s_n)\,(n \in \mathbf{N})$. Ha a sor konvergál, akkor a $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ határértéket a sor összegének mondjuk és úgyszintén $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$-nel jelöljük. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ szimbólum kettős használata (maga a sor, valamint a sor összege) lényeges zavart nem okoz, mert jelentése a szövegösszefüggésből egyértelműen kiderül. A továbbiakban $\sum(\mathbf{N}, \mathbf{R})$-rel jelöljük mindazoknak az $a = (a_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatoknak a halmazát, amelyekre a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergál. Magát a sorozatösszegzés műveletét $\sum_{n=0}^{\infty}$ -nel jelöljük, tehát $\sum_{n=0}^{\infty} : \sum(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R} : a = (a_n)\,(n \in \mathbf{N}) \to$ $\to \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. A későbbiekben való jobb tájékozódás-, a visszautalások és nem utolsó sorban a cikk független olvashatósága érdekében röviden összefoglaljuk a sorösszegzésre vonatkozó fontosabb tudnivalókat:

(1) Ha $a = (a_n)$ és $b = (b_n)$ eleme $\sum(\mathbf{N}, \mathbf{R})$-nek és $\alpha \in \mathbf{R}$, akkor $a + b = (a_n + b_n)$, valamint $\alpha a = (\alpha a_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ is eleme $\sum(\mathbf{N}, \mathbf{R})$-nek és $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (azaz az $\sum(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ valós vektortér és $\sum_{n=0}^{\infty}$ lineáris leképzés). Ha pedig $a \le b$ (azaz $a_n \le b_n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$), akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, azaz $\sum_{n=0}^{\infty}$ monoton.

(2) Ha $a = (a_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ nem-negatív (azaz $a_n \ge 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$-re), akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergenciája egyenértékű egy felső korlát létezésével és ebben az esetben az összegre nézve fennáll a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup_{n \in N} \{a_0 + a_1 + \ldots + a_n\}$ egyenlőség.

(3) Ha az $a = (a_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ és $b = (b_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatok csak egy véges halmazon különböznek, azaz $\{n \in \mathbf{N} \mid a_n \ne b_n\}$ véges halmaz, akkor a és b egyidejűleg tartoznak (vagy nem) a $\sum(\mathbf{N}, \mathbf{R})$-hez (ezt a tulajdonságot nevezzük a sorkonvergencia transzfinit jellegének).

(4) *A zérusértékek semmissége.* **Legyen $a = (a_n) \in \sum(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N})$ és $k: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ egy szigorúan növekvő leképzés. Ha a $b = (b_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatot úgy értelmezzük, hogy $b_n = a_m$, ha $n = k_m$ és másként 0, akkor $b \in \sum(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$. [Igazolásként azt vesszük észre, hogy $k(m) \le n < k(m+1)$ esetén $b_0 + b_1 + \ldots + b_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$.]**

(5) A sorozatokra vonatkozó CAUCHY-féle konvergencia kritériuma értelmében: $a = (a_n) \in \sum(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N})$ azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ „küszöb", amelyre ha $n \ge m \ge n_\varepsilon$, akkor $|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| < \varepsilon$. Innen automatikusan következik, hogy ha $|a| = (|a_n|) \in \sum(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $a = (a_n) \in \sum(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N})$ (hisz $|a_m + \ldots + a_n| \le |a_m| + \ldots + |a_n|$), azaz az ún. abszolútkonvergencia maga után vonja a konvergenciát. Úgyszintén a Cauchy-kritériumból olvasható ki a konvergenciának $a_n \to 0$, ha $n \to \infty$ szükséges (de nem elégséges) feltétele.

Ezek után megfogalmazzuk az asszociativitás-, ill. kommutativitásra vonatkozó kérdéseket:

Az asszociativitás problémája. Legyen $a = (a_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ egy rögzített számsorozat s a neki megfelelő $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor. Az (átrendezés nélküli) csoportosításon (asszociáláson azt értjük, hogy egy szigorúan növekvő $0 = k_0 < k_1 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$ indexsorozat alapján képezzük az $a_{k_n} + a_{k_n+1} + \ldots + a_{k_{n+1}-1}$ $(n \in \mathbf{N})$, véges összegeket s az ezeknek megfelelő $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{k_n} + \ldots + a_{k_{n+1}-1})$ ún. asszociált sort. Ha $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ és $S_m = \sum_{n=0}^{m} (a_{k_n} + \ldots + a_{k_{n+1}-1})$, akkor $S_m = s_{k_{m+1}-1}$, tehát az asszociált sor részsorozata az eredeti sornak s ezért igaz, hogy:

(6) Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{k_n} + \ldots + a_{k_{n+1}-1})$ is az; összegeik pedig megegyeznek.

A fordított állításnak semmi alapja nincs és nem is igaz (hisz egy részsorozat konvergenciájából nem következik magának a sorozatnak a konvergenciája). Példaként elég, ha az $a_n = (-1)^n$, $(n \in \mathbf{N})$, sorozatra gondolunk; ekkor $s_n = (-1)^0 - + \ldots + (-1)^n = \begin{cases} 1, \text{ ha } n \text{ páros} \\ 0, \text{ ha } n \text{ páratlan - divergens,} \end{cases}$ míg a $k_n = 2n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatnak megfelelő asszociált $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{(-1)^{2n} + (-1)^{2n+1}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} 0$ konvergens. A kérdés tehát a következő: milyen feltételt kell kielégítsen egy asszociált sor ahhoz, hogy konvergenciájából magának a sornak a konvergenciája következzen. Egy egyszerű eset mindjárt szembetűnő:

(6') Ha $a_n \ge 0$ minden $n \in \mathbf{N}$-re és $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{k_n} + \ldots + a_{k_{n+1}-1})$ konvergál, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is konvergál.

(Ebben az esetben a sort jelentő (s_n) $(n \in \mathbf{N})$ $(S_n = a_0 + \ldots + a_n)$ sorozat növekvő, tehát egy részsorozatának konvergenciája magát a sorozatét is maga után vonja.)

Az állítás érvényben marad, ha a pozitivitási feltételt a *csoportosított tagok állandó előjelére* tett kikötéssel helyetesítjük:

(6'') Adott $a = (a_n)$ $n \in \mathbf{N}$ sorozatra legyen $k: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ egy olyan szigorúan növekvő leképzés, hogy mindegyik $n \in \mathbf{N}$-re az $a_{k_n}, a_{k_n+1}, a_{k_n+2}, \ldots, a_{k_{n+1}-1}$ számok

azonos előjelűek. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor, valamint a $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{k_n} + a_{k_n+1} + \ldots + a_{k_{n+1}-1})$ csoportosított-sor egyidejűleg konvergálnak.

[*Bizonyítás.* Jelölje $b_n = a_{k_n} + \ldots + a_{k_{n+1}-1}$ (6) alapján csak az az eset tárgyalandó, amikor a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sor konvergál; legyen β e sor összege.

Ha $s_m = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$, míg $t_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$, akkor $k_n \le m < k_{n+1}$ esetén:

$|s_m - t_n| = |a_{m+1} + \ldots + a_{k_{n+1}-1}| \le |a_{k_n}| +$

$+ \ldots + |a_{k_{n+1}-1}| = |a_{k_n} + \ldots + a_{k_{n+1}-1}| =$

$= |b_n|$ (hisz az összegekben szereplő tagok azonos előjelűek). Ebből kifolyólag: $|s_m - \beta| \le |s_m - t_n| + |t_n - \beta|$, valamint az $(m \to \infty)$-ből következő $(k_n \to \infty)$ értelmében: $(s_m \to \beta)$ ha $m \to \infty$, azaz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \beta$.]

Megjegyzések.

a) (23)-ban ún. összegezhető sorokra egy még általánosabb eredményt fogunk bemutatni.

b) Az állandó előjelű csoportosítás határesete az, amikor az egymást követő csoportok előjelei ellentétesek, azaz $a_{k_n} \cdot a_{k_{n+1}} \le 0$, bármely $n \in \mathbf{N}$-re; ezt *alternáló csoportosítás*nak fogjuk mondani, s rájuk nézve igen hasznos lesz az alábbi jól ismert

(7) *LEIBNIZ-féle konvergenciakritérium:* Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sor váltakozó előjelű (alternáló), azaz $b_n \cdot b_{n+1} \le 0$, minden $n \in \mathbf{N}$-re, és ha $|b_0| \ge |b_1| \ge \ldots \ge |b_n| \ge |b_{n+1}| \ge \ldots$, akkor a sor konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele az, hogy $(n \to \infty)$-re : $b_n \to 0$.

[A teljesség kedvéért vázoljuk az elégségesség igazolását: Feltesszük, hogy b_0 pozitív. Ekkor a páros (ill. páratlan) részletösszegek sorozatai monotonok, pontosabban:

$$\begin{cases} s_{2n+2} = s_{2n} + b_{2n+1} + b_{2n+2} \le s_{2n}, \\ s_{2n+3} = s_{2n+1} + b_{2n+2} + b_{2n+3} \ge s_{2n+1}, \\ s_{2n+1} = s_{2n} + b_{2n+1} \le s_{2n}. \end{cases}$$

Következik, hogy $[s_1, s_0] \supset [s_3, s_2] \supset \ldots \supset [s_{2n+1}, s_{2n}] \supset \ldots$, tehát $\bigcap_{n=0}^{\infty} [s_{2n+1}, s_{2n}] \ne \emptyset$.

Mivel $s_{2n+1} - s_{2n} = b_{2n+1} \to 0$ (ha $n \to \infty$) ezért a metszet egyetlen számot tartalmaz s az (s_n) $(n \in \mathbf{N})$ sorozat ehhez a számhoz tart.]

A kommutativitás problémája a sor tagjainak sorrendbeli átrendezésével kapcsolatos: a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor átrendezésén az indexek egy bijektív $\pi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ permutálásával előírt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)} = a_{\pi(0)} + \ldots + a_{\pi(n)} + \ldots$ sort értjük. A felmerülő kérdés világosan az, hogy milyen viszonyban áll a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és a π szerint átrendezett $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ sor (mind a konvergencia, mind pedig az összeg szempontjából). Ezen a téren több érdekes eredmény igazolható:

a) a pozitív tagú sorok „érzéketlenek" az átrendezésre nézve (sem konvergenciájuk, sem összegük nem módosul – bárhogy is permutáljuk a tagokat),

b) hasonló a helyzet az összes ún. összegezhető sorozatok esetén is (1. (14")).

c) meglepő az a Riemann nevéhez fűződő, tétel, miszerint: ha egy sor konvergens, de nem összegezhető, akkor bárhogy is választunk egy $\alpha \in \mathbf{R}$ számot, egy alkalmas $\pi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekcióra: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha$ (tehát, az adott feltételek mellett, az átrendezett

sor bármilyen összegű lehet). E nevezetes tételre később visszatérünk, pillanatnyilag csak a bizonyítás lényeges mozzanatát leíró eljárást ismertetjük:

(8) Ha az $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ sorozatok $(n \to \infty)$-re kielégítik a

(*) $a_n \geq 0$ és $a_n \to 0$, míg $a_0 + \ldots + a_n \to \infty$,

(**) $b_n \leq 0$ és $b_n \to 0$, míg $b_0 + \ldots + b_n \to -\infty$,

feltételeket, akkor bármely $\alpha \in \mathbf{R}$-ra léteznek olyan $0 = p_0 < p_1 < \ldots < p_n < \ldots$ ill. $0 = q_0 < q_1 < \ldots < q_n < \ldots$ természetes számsorozatok, hogy $a_0 + a_1 + \ldots + a_{p_1} + b_0 + b_1 + \ldots + b_{q_1} + a_{p_1+1} + \ldots + a_{p_2} + b_{q_1+1} + \ldots + b_{q_2} + \ldots$ konvergál és az összeg α.

[*Igazolás.* Legyen $A_{p,n} = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n$ és $B_{q,m} = b_q + \ldots + b_m$ $(p \leq n$ és $q \leq m)$. Bármely rögzített p-, ill. q-ra: $A_{p,n} \to \infty$, ill. $B_{q,n} \to -\infty$ ha $n \to \infty$.

Az előbbi állítást $p = 0$-ra alkalmazva és figyelembe véve, hogy $(A_{0,n})$ $(n \in \mathbf{N})$ növekvően tart ∞-hez, ezért létezik egy *legkisebb* olyan $p_1 \in \mathbf{N}$, amelyre: $A_{0,p_1} = a_0 + \ldots + a_{p_1} > \alpha$. Hasonlóan, mivel $(B_{0,n})$ $(n \in \mathbf{N})$ csökkenő és $-\infty$-hez tart, ezért létezik olyan *legkisebb* $q_1 \in \mathbf{N}$, amelyre: $A_{0,p_1} + B_{0,q_1} = a_0 + \ldots + a_{p_1} + b_0 + \ldots + b_{q_1} < \alpha$. Következik, hogy $A_{0,p_1} - a_{p_1} < \alpha < A_{0,p_1}$ és $A_{0,p_1} + B_{0,q_1} < \alpha < A_{0,p_1} + B_{0,q_1} - b_{q_1}$. Hasonlóan határozzuk meg azt a legkisebb $p_2 > p_1$, ill. $q_2 > q_1$ számot, amelyre: $A_{0,p_1} + B_{0,q_1} + A_{p_1+1,p_2} = A_{0,p_2} + B_{0,q_1} = a_0 + \ldots + a_{p_1} + b_0 + \ldots + b_{q_1} + a_{p_1+1} + \ldots + a_{p_2} > \alpha$ ill. $A_{0,p_1} + B_{0,q_1} + A_{p_1+1,p_2} + B_{q_1+1,q_2} = A_{0,p_2} + B_{0,q_2} = a_0 + \ldots + a_{p_1} + b_0 + \ldots + b_{q_1} + a_{p_1+1} + \ldots + a_{p_2} + b_{q_1+1} + \ldots + b_{q_2}$. Hasonlóan a p_2, ill. q_2 minimalitásából adódik, hogy: $\alpha < A_{0,p_2} + B_{0,q_1} < \alpha + a_{p_2}$, ill. $\alpha + b_{q_2} < A_{0,p_2} + B_{0,q_2} < \alpha$. Az eljárást induktíven megismételve kapjuk a (p_k) $k \in \mathbf{N}$, (q_k) $(k \in \mathbf{N})$ indexeket, amelyekre érvényesek az $\left\{\begin{matrix} \alpha < A_{0,p_{k+1}} + B_{0,q_k} < \alpha + a_{p_{k+1}} \\ \alpha + b_{q_k} < A_{0,p_k} + B_{0,q_k} < \alpha \end{matrix}\right\}$ egyenlőtlenségek. Innen, $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$ alapján következik, hogy az alternáltan csoportosított $(a_0 + \ldots + a_{p_1}) + (b_0 + b_1 + \ldots + b_{q_1}) + \ldots$ sor konvergál az α összegéhez, hisz ennek a sornak az n-edik részletösszege $s_n = \begin{cases} A_{0,p_k} + B_{0,q_{k-1}}, n = 2k-1 \\ A_{0,p_k} + B_{0,q_k}, n = 2k \end{cases}$. Most már csak a (6'')-ra kell hivatkoznunk annak igazolására, hogy a nem csoportosított sor összege pont α.]

Az eddig tárgyalt kérdéseket jól illusztrálhatjuk a különböző módon előjelzett ún. harmonikus sorokon. Ezt a célt szolgálja a következő pont ,,példatára''.

Ujjgyakorlatok a harmonikus sor témájára

Mivel három egymást követő természetes szám reciproka közül a középső harmonikus középarányosa a két szélsőnek (azaz $\frac{1}{n} = \frac{2}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}}$), ezért az $\left(\frac{1}{n}\right)$ $n \in \mathbf{N}^*$ sorozatot harmonikusnak mondjuk (a neki megfelelő $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort úgyszintén) a részletösszegekre pedig a $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ jelölést használjuk. Amint látni fogjuk, e sor tagjainak alkalmas ,,előjelezésével'' igen változatos hely-

zeteket állíthatunk elő. Az előjelek kitüntetésére egy σ: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ alakú leképezést használunk a neki megfelelő sor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{n}$ (ha pl. σ állandóan páros, akkor magát a harmonikus sort kapjuk; míg $\sigma(n) = n + 1$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} =$ $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ az ún. alternáló harmonikus sor). Ezek közül egyesek konvergensek, mások pedig nem – e jelenség magyarázatára az összegzés elmélete fog (valamelyest) fényt deríteni.

Általában a számításaink igen egyszerűek lesznek, alapjukat a jól ismert $\frac{1}{k+1} <$ $< \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$ egyenlőtlenség képezi. Összeadva $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$-re kapjuk, hogy $\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}$, tehát a $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ összegekre fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

(*) $c_n - c_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} > 0$,

(**) $c_n > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n > 0$;

(***) $c_n = 1 + \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) < 1$,

s ebből kifolyólag a csökkenő és alulról korlátos (c_n) $(n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergál; határértéke a nevezetes EULER-féle $c = 0{,}5771\ldots$ állandó. Mivel $\ln n \to \infty$, ha $n \to \infty$, ezért az előzőekből következik, hogy a $h_n = 1 + \frac{1}{2} +$ $+ \ldots + \frac{1}{n}$ sorozat szigorúan növekedve tart ∞-hez, tehát:

(9) A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens.

Megjegyzés. Vele együtt divergálnak a páros, ill. páratlan számok reciprokainak, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, ill. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, sora (hisz $\frac{1}{2} + \ldots +$ $+ \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} h_n$, míg $1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} >$ $> \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}$).

Íme két konvergens előjelezés:

(10) A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ún. alternáló harmonikus sor konvergens, összege pedig ln 2.

[*Útmutatás.*

$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$

$= \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$

$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$

$= c_{2n} - c_n + \ln 2 \to \ln 2$, ha $n \to \infty$. Ugyanakkor $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2$, ha $n \to \infty$.]

(11) Rögzített $p, q \in \mathbf{N}$ számokra a $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{2np+1} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)p-1}\right) - \left(\frac{1}{2nq} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)q-1}\right)\right\}$ sor konvergál és összege $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

[*Útmutatás.* Az n-ed rendű s_n részletösszeg felírható a következő alakban is:

$s_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)p-1}\right) -$

$$-\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)q-1}\right)=h_{2(n+1)p-1}-$$

$$-\frac{1}{2}h_{2(n+1)p}-\frac{1}{2}h_{2(n+1)q}=c_{2(n+1)q-1}-$$

$$-\frac{1}{2}c_{(n+1)p}-\frac{1}{2}c_{(n+1)q}+\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.]$$

Megjegyzések.

a) Ezt a sort az alternáló harmonikus sor egy periódikus átrendezésével kapjuk, éspedig úgy, hogy először vesszük az első p páratlan nevezőjű tagot, majd az első q párosat és ezt az eljárást vég nélkül megismételjük, majd pedig az újonnan kapott sort $(p+q)$ tagonként csoportosítjuk. A sajátos $p=1=q$ választáskor marad az eredeti alternáló sor kettőnkénti csoportosítása.

b) Az eredmény kitapinthatóan érzékelteti, hogy az összeg értéke mennyire függ attól, hogy az összeadandókra mikor kerül sor. Valóban, ha a $\frac{p}{q}$ arányt növeljük (p növelve vagy/és q csökkentve), akkor a pozitív tagok a negatívaknál hamarabb kerülnek sorra s ezért a végösszegre gyakorolt hatásuk nagyobb és ennek megfelelően az növekszik.

c) A $\left\{\frac{p}{q}\,|\,p,q\in\mathbf{N}\right\}$ racionális számhalmaz $\mathbf{R}_+$-beli sűrűségéből, valamint a $\ln\colon \mathbf{R}_+^{\bullet}\to\mathbf{R}$ leképezés szürjektivitásából könnyen levezethető, hogy a $\left\{\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}\,|\,p,q\in\mathbf{N}\right\}$ halmaz $\mathbf{R}$-ben sűrű. Ez érzékelteti a RIEMANN-féle tétel állítását.

A további két példa szintén az alternáló csoportosítással kapcsolatos és jól illusztrálja a rájuk vonatkozó tételeket (a bennük szereplő $E(\alpha)$ jelölés az $\alpha\in\mathbf{R}$ szám egész részét jelenti, tehát azt az egyetlen $E(\alpha)$ egész számot, amelyre: $E(\alpha)\le\alpha<E(\alpha)+1$).

(12) A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$ sor konvergens.

(*Indoklás.* Mivel $\left\{n\in\mathbf{N}\,\middle|\,E(\sqrt{n})=m\right\}=\left\{m^2,m^2+1,\ldots,m^2+2m\right\}$ és

$$b_m=\left(\frac{1}{m^2}+\ldots+\frac{1}{m^2+m-1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{m^2+m}+\ldots+\frac{1}{m^2+2m}\right)\text{ esetén}$$

$b_m<\frac{m}{m^2}+\frac{m+1}{m^2+m}=\frac{2}{m}$, és

$b_m>\frac{m^2}{m^2+m}+\frac{m+1}{(m+1)^2}=\frac{2}{m+1}$, ezért az adott sor alternáló csoportosítása, azaz a $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^m\sum_{n=m^2}^{m^2+2m}\frac{1}{n}\right)$ sor kielégíti a LEIBNIZ-féle konvergenciakritérium feltételeit ($b_{m+1}<$ $<\frac{2}{m+1}<b_m$ és ezért $b_m\to 0$ is teljesül), ezért konvergens. Ezek után a szóban forgó konvergencia (6'')-ből következik.)

(13) A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{E(\ln n)}}{n}$ sor divergens.

(*Indoklás.* Ha konvergálna, akkor alternáló csoportosítása, azaz a $\sum_{m=0}^{\infty}\left((-1)^m\sum_{e^m<n<e^{m+1}}\frac{1}{n}\right)$ sor szintén konvergálna, mivel $2^{e^n}<e^{n+1}-1$, ezért $2E(e^m)<E(e^{m+1})$, tehát

$$\sum_{e^m<n<e^{m+1}}\frac{1}{n}=\frac{1}{E(e^m)+1}+\ldots+\frac{1}{E(e^{m+1})}>$$

$$>\frac{1}{E(e^m)+1}+\ldots+\frac{1}{E(e^m)+E(e^m)}=\frac{1}{2};\text{ s ez}$$

kizárja a csoportosított sor konvergenciájának lehetőségét, mivel az általános tag nem tart nullához.)

Dr. Urbán János

Versenyfeladatok

1993. április 2-án írták meg országszerte a **KMBK XXII. Országos Kalmár László Versenye** megyei döntőjét, itt a feladatokat közöljük.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

1. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a páratlan számjegyek száma páratlan? Állításod indokold!
2. Van 60 darab egybevágó (egyforma) kis kockánk. Hányféle különböző méretű téglatestet lehet ezekből összerakni? (A téglatesthez mindegyik kis kockát fel kell használni!)
3. Bizonyítsd be, hogyha 1-től kezdve összeadjuk a természetes számokat egy olyan számig, amelyiknek a tízes számrendszerbeli alakja 5-re végződik, 5-tel osztható számot kapunk!
4. Keress olyan különböző számjegyekből álló háromjegyű számot, amelyre igaz, hogy két olyan háromjegyű szám összegeként állítható elő, amelyeknek ugyanazok a számjegyei, mint az összegnek, csak más sorrendben!

HATODIK OSZTÁLY

1. Írj fel egy tetszőleges háromjegyű számot (például: 235), majd készítsd el azt a hatjegyű számot, ami ennek a számnak a kétszer egymás után írásával keletkezik (235235).
   A kapott szám mindig osztható 13-mal!
   Magyarázd meg, miért igaz ez mindig?
2. Hány olyan nyolc számból álló, csak 0-t nagy 1-et tartalmazó sorozat van, amelyben nem fordul elő két szomszédos 1?
3. Egy kockát két szemközti lapjával párhuzamos síkokkal úgy "szeletelünk fel", hogy a keletkezett testek felszínének összege háromszorosa legyen a kocka felszínének. Hány síkkal szeleteltük fel a kockát?
4. Egy kétszemélyes liftben egy 8 tagú társaság megy fel a tizedik emeleti étterembe egy vacsorára. Hányféleképpen érkezhet meg az étterembe a nyolc ember?

HETEDIK OSZTÁLY

1. Késő este egy autóbuszon heten utaztak, mindenki a végállomáson szállt le. A játékos kedvű sofőr mindegyik utast megkérdezte, hány embert ismer az utastársai közül. Sorra a következő válaszokat kapta:

   1, 2, 3, 6, 5, 3, 1.

   A sofőr rövid gondolkodás után rájött, valaki nem mondott igazat. Hogyan okoskodott a sofőr? (Az ismeretség kölcsönös!)

2. Egy szabályos hatszögben meghúztuk a hosszabbik átlókat, ezek a hatszöget háromszögekre bontották. Ezután megjelöltük a hatszögben azokat a pontokat, amelyek közelebb vannak a hozzájuk legközelebb eső oldalhoz, mint a hozzájuk legközelebb eső hosszabbik átlóhoz. Hányad része a hatszög területének a megjelölt pontok által alkotott síkrész területe?

3. Igaz-e, hogy a következő alakú, tízes számrendszerben felírt számok mind négyzetszámok:

$$49,\ 4489,\ 444889,\ 44448889,\ \ldots?$$

4. Egy szimmetrikus (egyenlőszárú) trapéz hosszabbik alapja kétszerese a rövidebb alapnak. Tudjuk még, hogy a trapéz átlója felezi a trapéz hegyesszögét.
Mekkorák a trapéz szögei?

5. Felírtuk egy sorozat első néhány tagját:

$$\frac{1}{2},$$

$$\frac{1+3}{2+4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{1+3+5}{2+4+6}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4},$$

...

A sorozatot olyan törtekből képezzük, amelyek számlálójában az első n páratlan szám, a nevezőjében az első n páros szám összege áll.

Igaz-e, hogy a sorozat n-edik eleme $\frac{n}{n+1}$?

Állításodat indokold!

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. Döntsd el, hogy a következő 13-jegyű szám négyzetszám-e:

$$1020304030201\ ?$$

2. Egy fontos „titkos" jelentést 10 oldalra gépeltek le és az egyes oldalakat megkapta egy-egy ember és hazavitte. Mind a 10 embernek van telefonja.
Igazoljuk, hogy 16 telefonbeszélgetés elég ahhoz, hogy a jelentés teljes tartalmát mind a 10 ember megismerje! (A telefonbeszélgetéskor a két ember az összes rendelkezésre álló információt kölcsönösen kicseréli.)

3. Egy négyzet belsejében megjelöltük azokat a pontokat, amelyek közelebb vannak a hozzájuk legközelebb eső oldalhoz, mint a hozzájuk legközelebb eső átlóhoz.
Hányad része a négyzet területének a megjelölt pontok által alkotott síkrész területe?

4. Osszunk fel egy adott trapézt egyik szárának felezőpontjából húzott egyenessel két egyenlő területű részre!

5. Egy téglalap oldalai 20 és 25 egység. Elhelyeztünk benne 120 darab 1 oldalú négyzetet.
Igazoljuk, hogy a téglalapba rajzolható olyan egységátmérőjű kör, amelynek nincs közös pontja egyik négyzettel sem!

1993. március 19-én rendezték a ***Bátaszéki Általános Iskola által meghírdetett Tolna Megyei Általános Iskolai Matematikaverseny*** megyei döntőjét.

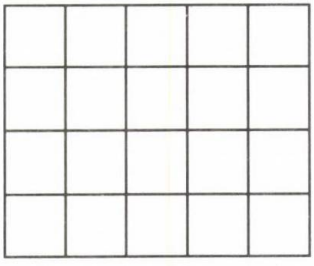
A verseny szervezését és a feladatok összeállítását Károlyi Károly megyei matematika szaktanácsadó végezte. A versenyen budapesti tanulók is részt vettek.
A feladatok:

4. osztály

1. Írd fel a 305-ös számot
a) két egymást követő szám összegeként!
b) öt egymást követő szám összegeként!
c) Felírható-e a 305 négy egymást követő szám összegeként is?

2. Egy üzletben 1620 m szövet volt. Az első nap eladták az összes szövet három tized részét, a második napon a maradék egyhatodát. A maradék szövetet aztán két napon belül eladták úgy, hogy a harmadik napon négyszer annyit adtak el, mint a negyedik napon.
Mennyit adtak el az egyes napokon, ha a négy nap alatt az összes szövetet eladták?

3. Darabold fel a téglalapot a vonalak mentén négy egybevágó részre!



4. Öt ládában ugyanannyi alma van. Ha mindegyik ládából kiveszünk 60 darabot, akkor az öt ládában annyi alma marad, amennyi eredetileg két ládában volt.
Mennyi volt eredetileg a ládákban?

5. $XY + XY + XY = ZX$
A fenti összeadásban egyenlő betűk egyenlő számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek.
Milyen számjegyek kerülhetnek a betűk helyére?

5. osztály

1. Hány óra van, ha az az idő, ami a napból hátra van $\frac{5}{3}$ -a a napból eltelt időnek?
(A napot 24 órának vesszük és éjfélkor kezdődik.)

2. Az osztályba 14 fiú jár. Nyolc gyereknek van szemüvege, közülük 3 fiú.
13-an járnak matematika szakkörre, a fiúk között 6 matematika szakkörös van, a matematika szakkörösök között 5 szemüveges van, közöttük két fiú.
Öt olyan lány van, aki nem szemüveges.
a) Hány lány jár az osztályba?
b) Hány szemüveges lány jár az osztályba?
c) Hány lány jár matematika szakkörre?
d) Hány szemüveges lány jár matematika szakkörre?

3. Egy kocka éleinek hossza 10 cm. Minden lapjának közepére ráragasztunk egy-egy 5 cm élhosszúságú kockát és a kapott testet kékre festjük.
Hány cm^2-t kell befestenünk? Mennyi az így összeállított test térfogata?

4. A 9 darab 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm és 9 cm hosszúságú pálcikákból rakjatok ki négyzetet. Ha ez sikerül, határozzátok meg a négyzet oldalhosszúságát.
Rakjatok ki további négyzeteket is!
A négyzeteket egyenlőnek tekintjük, ha ugyanazon az oldalán csak a pálcikák vannak megcserélve, vagy ha egész oldalakat cserélünk meg.
A négyzet kirakásához nem kell minden pálcikát felhasználni.

5. A négyzethálóban helyettesítsétek a betűket számokkal úgy, hogy bűvös négyzetet kapjatok!

a	*b*	*x*	–2
2	–3	–4	5
x	*c*	–1	0
k	*x*	*e*	*f*

6. osztály

1. *a)* Egy téglalap egyik oldala 10 cm, a másik oldala 6 cm.
Szerkeszd meg a téglalapot!

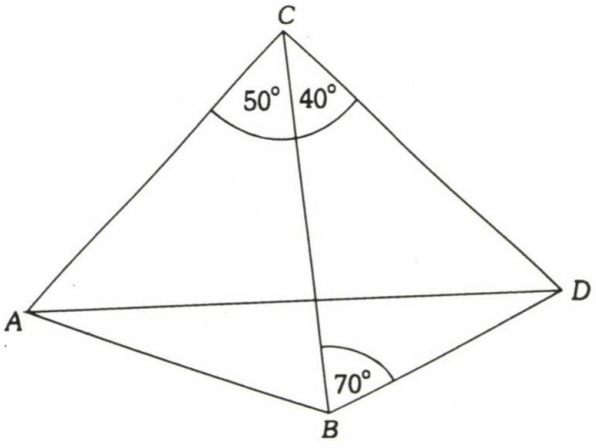
b) Szerkeszd meg a téglalap belső szögfelezőit!
Milyen síkidomot zárnak be a belső szögfelezők? Indokold meg!

c) Mekkora az így keletkezett síkidom területe?

2. Határozd meg azokat az $\overline{abab}$ alakú négyjegyű számokat, amelyek oszthatók 15-tel!

3. Pista és Gyuri sakkoznak. Éppen azon gondolkodnak, hogy hányféleképpen lehet két bástyát elhelyezni a sakktáblán úgy, hogy azok ne üssék egymást?

4. Az ábrán egy *ABDC* négyszög látható. Az *AB* alapú háromszög egyenlő szárú.
Határozd meg az *ABD* háromszög szögeinek nagyságát, ha ismertek az ábrán megadott szögek! (Szögmérőt ne használj!)



5. Egy város területe 5 egybevágó négyzetből áll olyan elrendezésben, hogy az alaprajza L alakú. A várost övező kőfal annyi km hosszú, mint ahány km^2 a város területe.
Milyen hosszú a kőfal?

7. osztály

1. Bizonyítsd be, hogy

$$1991^{1991} + 1992^{1992} + 1993^{1993}$$

osztható 10-zel!

2. Bizonyítsd be, hogy az

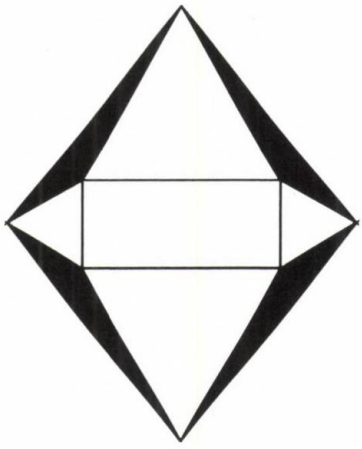
$$N = 1993 + 2(1 + 2 + \ldots + 1992)$$

szám egy természetes szám négyzete!

3. Az $ABCD$ téglalap ABC háromszögébe beírt kör középpontja O. Az O ponton át az oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyek az AD ill., a DC oldalakat az E ill. F pontban metszik.
Hányadrésze az $EOFD$ téglalap területe az $ABCD$ téglalap területének?

4. Szerkesszük meg az $ABCD$ ($AB \mid\mid CD$) húrtrapézt, ha ismerjük a b szárának a hosszát, $b = 5$ cm, az alapon levő szög nagyságát $\alpha = 60°$ és a $c + e = 12$ cm hosszúságot ($c = CD$ alap és az e átló összege)!

5. Rajzolj egy téglalap oldalai fölé szabályos háromszögeket az alábbi módon!
Igazold, hogy a vonalkázott terület egyenlő a téglalap területével!



8. osztály

1. A „TOLNA" szó minden betűjének megfeleltetünk egy számjegyet.
A számjegyekre igazak a következők:

$$T + O + L + N + A = 21$$
$$T + O + L = 12$$
$$O \cdot L = 21$$
$$L + N = 8$$
$$A : T = 2$$

Melyik ötjegyű számhoz jutunk?

2. Igaz-e a következő állítás?
„Ha egy négyjegyű szám két-két számjegye egyenlő, akkor a szám osztható vagy 11-gyel, vagy 101-gyel."

3. Legyen adott egy ABC hegyesszögű háromszög és ennek AB oldalán egy tetszőleges D pont. Szerkeszd meg az AC oldalon az E, a BC oldalon az F pontot úgy, hogy a DEF háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen!

4. Szerkesszük meg az $ABCD$ konvex négyszöget, ha adott két szomszédos oldalának hossza:
$AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm!
Az átlók hossza:
$AC = 5{,}5$ cm és $BD = 4{,}5$ cm.
Az AMB szög $= 60°$ (M az átlók metszéspontja)

5. Rajzolj egy háromszög egyik oldala fölé kifelé egy tetszés szerinti körívet. Ennek felezőpontjából húzott egyenessel vágd két egyenlő területű részre a háromszögből és a körszeletből álló idomot.

Ez év április 4-7-ig Vácott rendezték a ***II. Nemzetközi Középiskolás Matematikaversenyt.*** A versenyen Felvidékről, Kárpátaljáról, Erdélyből, Délvidékről és Magyarországról összesen 220 középiskolás tanuló vett részt. A versenyen a következő feladatokat tűzte ki a versenybizottság:

Feladatsor az I. osztályosok részére

1. Egy háromjegyű szám jegyei különbözők, nincs közöttük nulla; a számjegyek összege n. Bizonyítsuk be, hogy a szám jegyeiből készíthető hat háromjegyű szám számtani közepe (átlaga) osztható 37-tel és n-nel.

(Délvidék)

2. Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalán vegyük fel a belső F, BC oldalán a belső E pontot úgy, hogy $AF = CE$ teljesüljön; legyen továbbá P az AB oldal tetszőleges belső pontja. Az FE szakasz metszéspontját DP-vel jelölje G, CP-vel pedig H. Bizonyítsuk be, hogy a PGH háromszög területe egyenlő az FGD és CHE háromszögek területeinek az összegével.

(Felvidék)

3. Mekkora az n pozitív egész értéke, ha

$$\frac{1}{3} + \frac{13}{15} + \frac{33}{35} + \ldots + \frac{(2n-1)\cdot(2n+1)-2}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = 995 + \frac{1}{1993}\,.$$

(Kárpátalja)

4. Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi sugarú kör belsejében adott négy különböző pont között van olyan kettő, amelyeknek a távolsága kisebb, mint $\sqrt{2}$.

(Felvidék)

5. Legyen $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ és $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$, $n = 1, 2, \ldots$. Pl. $f_1(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.
Számítsuk ki $f_{1994}(1993)$ értékét!

(Magyaro. Róka Sándor)

6. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok, mely pozitív egész n számokra igaz, hogy:
$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| =$
$= 2 \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) - 2 \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$?

(Erdély, Bencze Mihály)

Feladatsor a II. osztályosok részére

1. Az $ABCD$ négyzet CD oldalára kifelé szerkesszünk egy DCM derékszögű háromszöget (a derékszög M-nél van). Bizonyítsuk be, hogy a derékszög szögfelező egyenese a négyzetet két egybevágó részre vágja szét.

(Felvidék)

2. Előállítható-e a $93n^2 - 4n + 5$ másodfokú polinom (háromtag) két racionális együtthatójú elsőfokú polinom (lineáris kéttag) négyzeteinek különbségeként?

(Felvidék)

3. Oldjuk meg a pozitív prímszámok halmazán a következő egyenletet:

$$3x^2 + 6x = 2y^2 + 7y.$$

(Felvidék)

4. Egy háromszög súlyvonalai: s_a, s_b, s_c. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha súlyvonalai között

$$s_a^2 + s_b^2 = 5s_c^2$$

típusú egyenlőség áll fenn.

(Kárpátalja)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha n 1-nél nagyobb egész szám, akkor

$$\sqrt[3]{n - \sqrt{n}} + \sqrt[3]{n + \sqrt{n}}$$

irracionális szám.

(Kárpátalja, Tar Miklós)

6. Igazoljuk a következő azonosságot:

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+4}\right] = \left[\sqrt{9n+17}\right],$$

ahol n 2-nél nagyobb vagy egyenlő egész szám és [ ] az egész részt jelöli.

(Erdély, Bencze Mihály)

Feladatsor a III. osztályosok részére

1. Jelölje p_n az n-edik prímszámot. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$N = p_n + p_{n+1},$$

akkor N legalább három, nem feltétlenül különböző prímszám szorzata. ($n > 1$).

(Magyarország, Róka Sándor)

2. A pozitív egész számok sorozatából töröljük az 1-et, továbbá a 2-vel és a 3-mal osztható számokat. A maradék sorozat:

$$5, 7, 11, 13, 17, \ldots .$$

Adjuk meg e sorozat n-edik tagjának az előállítását n segítségével.

(Délvidék)

3. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = 1.$$

(Kárpátalja)

4. A körbe írt $ABCD$ négyszög (húrnégyszög) AC átlójának a felezőpontja a BD átlón van. Bizonyítsuk be, hogy

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2BD^2 .$$

(Délvidék)

5. Határozzuk meg azt a legnagyobb P egész számot, amelyre igaz, hogy az 1, 2, ..., 99, 100 számok bármely permutációjában van 10 egymást követő elem, amelyek összege legalább P.

(Magyarország, Urbán János)

6. Ha x, y, z tetszőleges pozitív számok, igazoljuk, hogy:

$$\frac{x+y+z}{3} - \sqrt[3]{xyz} \geq \frac{1}{6}\left(\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2 + \left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)^2\right).$$

Általánosítsd a feladatot!

(Erdély, Bencze Mihály)

Feladatsor a IV. osztályosok részére

1. Milyen n-ekre igaz a következő állítás: bármely n-oldalú, önmagát nem metsző sokszögnek van olyan belső pontja, amelyből kerületének minden pontja látszik. (Ha A a sokszög kerületének egy pontja, P pedig a sokszög belső pontja, az A pont akkor látszik P-ből, ha az AP szakasz minden pontja, A-n kívül, a sokszög belsejében van.)

(Magyarország, Bogdán Zoltán)

2. A K kocka élhossza 6 egység. Vágjuk ezt szét 216 egységkockára! Hány olyan kocka létezik, amelyet ezek az egységkockák töltenek ki? (Két kockát különbözőnek tekintünk, ha K-n belül nem azonos helyet foglalnak el.)

(Délvidék)

3. Határozzuk meg

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 - \sin\alpha\sin\beta}$$

maximumát és minimumát, ha α és β tetszőleges valós szögmérték!

(Felvidék)

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3.$$

(Felvidék)

5. Határozzuk meg azt a valós együtthatós $P(x)$ polinomot, amely eleget tesz a következő feltételnek:

a) $xP(x) = (x-3)\cdot P(x+1)$, *b)* $P(4) = -12$.

(Délvidék)

6. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges nem negatív számok, és k 1-nél nagyobb egész szám. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt[k]{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + \sqrt[k]{a_2 + a_3 + \ldots + a_n} + \ldots + \sqrt[k]{a_{n-1} + a_n} + \sqrt[k]{a_n} \geq$$

$$\geq \sqrt[k]{a_1 + 2^k a_2 + 3^k a_3 + \ldots + n^k a_n}$$

(Erdély, Bencze Mihály)

A tanárképző főiskolák matematika szakos hallgatóinak matematika versenye 1952-ben indult. Hagyományosan a Matematika Tanítása közölte a versenyekről szóló beszámolót, közben kitűzött feladatokat is. Az elmúlt három évben nem jelentek meg azok a feladatok, így pótlólag, az 1993. évi, Pécsett, április 5-én rendezett verseny feladatai mellett közöljük az elmúlt évi verseny feladatait is.

A tanárképző főiskolák 1993. évi Péter Rózsa Matematikaversenyének feladatai

1. Legyen p páratlan prímszám és k, n pozitív egészek, továbbá:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{p-1} = \frac{k}{n},$$

ahol $(k, n) = 1$. Igazoljuk, hogy p osztója k-nak!

2. Igazoljuk, hogy ha egy négyszög szemközti oldalegyeneseinek metszéspontjait összekötő szakaszt a négyszög egyik átlóegyenese felezi, akkor a másik átlóegyenes párhuzamos ezzel a szakasszal!

3. Bizonyítsuk be, hogy a

$$p(x) = (x^6 - 3x^3 + 1)^{1993} + (x^7 + x^5 - 1)^{1993}$$

polinomban az x páratlan kitevőjű hatványai együtthatóinak összege páratlan szám!

4. Legyen c tetszőleges valós állandó és jelölje $f(c)$ az $x^3 - 3x - c = 0$ egyenlet legkisebb és legnagyobb valós gyökének szorzatát. Határozzuk meg $f(c)$ minimumát!

5. Legyen az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezés olyan, hogy tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ esetén

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan $x_0 \in \mathbf{R}$, hogy $f(x_0) = x_0$ (azaz a leképezésnek van fix pontja)!

6. Határozzuk meg azt a legnagyobb P egész számot, amelyre igaz, hogy a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok bármely permutációjában van 10 egymást követő elem, amelyek összege legalább P!

7. András, Béla és Csaba teniszversenyt rendeznek egymás között a következő szabályok szerint:

(i) egy meccsen két ember játszik, döntetlen nincs;
(ii) a leggyöngébb játékos választja ki az első meccs résztvevőjét;
(iii) egy mérkőzés győztese játszik a következő mérkőzésen a harmadikkal (egy ember kétszer is játszhat ugyanazzal);
(iv) az nyeri a versenyt, akinek először lesz két nyert meccse.

András a leggyöngébb játékos, Béla a legerősebb, és feltesszük: annak a valószínűsége, hogy egy játékos legyőz egy másikat, a verseny során nem változik.
Hogyan válassza ki András az első meccs két résztvevőjét, hogy neki a lehető legnagyobb esélye legyen a végső győzelemre?

A tanárképző főiskolák 1992. évi Péter Rózsa Matematikaversenyének feladatai

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{p}$$

egyenletet, ahol p adott prímszám!

2. Egy tetraéder két szemközti élének hossza x (>0), az összes többi él hossza 1. Mely x érték esetén lesz a tetraéder térfogata maximális?

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x^2 + 10y + 41 = 0,$$
$$y^2 - 2z - 23 = 0,$$
$$z^2 - 6x + 17 = 0.$$

4. Egy országban háromféle tömegközlekedési eszközt használnak: autóbuszt, vonatot és repülőt.
Bármely két város kölcsönösen össze van kötve pontosan egyféle közlekedési eszközzel. Nincs olyan város, amelyből autóbusz, vonat és repülő is indul, és nincs három olyan város, amelyek körbejárhatók ugyanolyan típusú közlekedési eszközzel (a kiindulópontba visszatérve). Határozzuk meg az országban lévő városok lehetséges maximális számát!

5. Legyen $p > 3$ prímszám és $1 < k < p - 1$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{p-1}{k-1} \quad \text{és} \quad \binom{p-1}{k+1}$$

p-vel való osztáskor azonos maradékot adnak!

6. Adott egy S sík és három, nem egy egyenesre illeszkedő pont: A, B és C. Az A, B, C pontok síkja nem párhuzamos S-sel. Adjunk meg olyan vetítési irányt a térben, hogy az A, B, C pontok S síkra való, ezzel az iránnyal párhuzamos vetületi szabályos háromszöget alkossanak!

7. Legyen f olyan, a pozitív egészeken értelmezett valós értékű függvény, amelyre

$$f(1) = 1 \quad \text{és} \quad f(n+1) := \begin{cases} f(n) + 2, \text{ ha } f(f(n) - n + 1) = n, \\ f(n) + 1, \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Bizonytsuk be, hogy minden pozitív egész n-re

$$f(n) = [\alpha n],$$

ahol $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $[x]$ jelöli az x valós szám egész részét!

PÁLYÁZAT

A MOZAIK Oktatási Stúdió pályázatot hirdet

általános és középiskolai tankönyvek, feladatgyűjtemények, munkafüzetek, oktatási segédanyagok, módszertani útmutatók és egyéb tanári, valamint szülői segédletek megírására, összeállítására.

A pályamunkáknak tartalmazniuk kell:

- a szerzők személyi adatait (név, cím, munkahely, személyi szám)
- a kiadvány szerkezetére, felépítésére vonatkozó elképzelést (min. 2. old. terj.)
- egy fejezet vagy téma teljeskörű feldolgozását
- a kiadvány tartalomjegyzékét.

Az elfogadott pályaműveket a kiadó megjelenteti, az alkotók szerzői jogdíjban részesülnek.

A pályázatok beadásának határideje:

I. szakasz: 1993. július 31.
II. szakasz: 1993. december 31.

A szövegszerkesztővel, vagy géppel írt pályázatokat a következő címre kérjük beküldeni:

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
6701 SZEGED, PF. 301.

Bővebb információval a (62) 312-988-as telefonszámon Böszörményi Judit áll az érdeklődők rendelkezésére.

imosoft

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

1993. SZEPTEMBER ára: 86,- Ft I. évf. / 4. szám

TARTALOM

AZ AMERIKAI MATEMATIKAI VERSENYVIZSGÁKRÓL I.
Dr. Kántor Sándorné
egyetemi adjunktus, Debrecen

„RENDEZETT" ÉS „RENDEZETLEN" ÖSSZEGZÉS II.
Dr. Benkő József
egyetemi tanár, Transilvania Egyetem, Brassó

A XXII. KALMÁR LÁSZLÓ ORSZÁGOS VERSENY DÖNTŐJÉNEK FELADATAI ÉS EREDMÉNYE
Dr. Urbán János

EGY KIS SZÁMTAN
Nemetz Tibor
tudományos főmunkatárs, Budapest

PRÓBÁLJUK KI MINDEN ESETRE A COSINUS- ÉS A SINUSTÉTELT!
Uhrin János
szaktanácsadó, Békéscsaba

VERSENYFELHÍVÁS ÉS KITŰZÖTT FELADATOK 11-14 ÉVESEKNEK

KÖNYVISMERTETÉSEK
Scharnitzky Viktor, Bakó Zsuzsa

A tételek levezetése előtt a tanulókkal áttekintjük a háromszögek szerkesztését az alapadatokból.

I. A cosinustétel megismerése után kiválasztjuk azt a két alapesetet, amelyre kézenfekvő a tétel alkalmazása. Ezután feltesszük a kérdést: használható-e ... *(27. oldal)*

1893-ban, éppen 100 évvel ezelőtt Beke Manó és Reif Jakab középiskolai tanárok több, mint 20 év matematikai érettségi feladataiból válogatva összesen 1183 feladatot tartottak érdemesnek kötetbe rendezve kiadni. Nagyon sok feladatból válogathattak, hiszen akkoriban minden ... *(30. oldal)*

A feladatgyűjtemény – mint címéből is kiderül – pénzügyi-közgazdasági feladatokat tartalmaz, ennek ellenére – vagy éppen ezért – használatát valamennyi középiskolában tanító kollégámnak szívből ajánlom. Így olyan feladatokkal színesíthetjük matematikaóráinkat, amelyek ... *(31. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Olvasószerkesztő: Földvári Erika
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 430 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Hirdetésekkel kapcsolatos felvilágosítás:Tóth Mónika
Tel.: (62) 312-988

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

AZ AMERIKAI MATEMATIKAI VERSENYVIZSGÁKRÓL I.
Dr. Kántor Sándorné
egyetemi adjunktus, Debrecen

„RENDEZETT" ÉS „RENDEZETLEN" ÖSSZEGZÉS II.
Dr. Benkő József
egyetemi tanár, Transilvania Egyetem, Brassó

A XXII. KALMÁR LÁSZLÓ ORSZÁGOS VERSENY DÖNTŐJÉNEK FELADATAI ÉS EREDMÉNYE
Dr. Urbán János

EGY KIS SZÁMTAN
Nemetz Tibor
tudományos főmunkatárs, Budapest

PRÓBÁLJUK KI MINDEN ESETRE A COSINUS- ÉS A SINUSTÉTELT!
Uhrin János
szaktanácsadó, Békéscsaba

VERSENYFELHÍVÁS ÉS KITŰZÖTT FELADATOK 11-14 ÉVESEKNEK

KÖNYVISMERTETÉSEK
Scharnitzky Viktor, Bakó Zsuzsa

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 10-12 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat.

Dr. Kántor Sándorné

Az amerikai matematikai versenyvizsgákról I.

Legutoljára a Matematika Tanítása 1989. évi 1-2. számában számoltam be az amerikai versenyvizsgán (AHSME) kitűzött feladatokról. Ezek a versenyek azóta is minden évben megrendezésre kerülnek, és változatlanul népszerűek a diákok körében. Nagyon jól mérik a teljesítményt, ha versenyszerű körülmények között alkalmazzuk őket, vagyis a kitűzött 30 feladat kidolgozási ideje 90 perc, zsebszámológép nem használható, a helyes válaszért 5 pont, a helytelen válaszért 0 pont, a megválaszolatlanul hagyott kérdésekért 2 pont jár. A 100 pont feletti összteljesítmény már kiválónak mondható.

A feladatsorok megoldása felkészíti a tehetséges tanulókat a számválaszos versenyekre is, amelyeket az olimpiai szakkörök keretében írnak meg a megyék legtehetségesebb tanulói.

A tesztjellegű formával való megismerkedésre mind a tanulóknak, mind a tanároknak szüksége van, nem szabad lemaradnunk a nemzetközi fejlődés vonalától, mert számos országban (USA, Kanada, Ausztrália, Egyesült Királyság, sőt számos fejlődő ország) így bonyolítják le a középiskolai tanulók versenyét. Több mint 10 éves tapasztalatunk alapján szeretném megnyugtatni a tanárokat, hogy ne féljenek attól, hogy a tanulók ezen a versenyvizsgán nem végeznek komoly munkát, vagyis „csak tippelnek", mert ebben az esetben nem tudnak 100 pont feletti eredményt elérni. Az alacsonyabb pontszámok esetében valóban nem mér jól a teszt, illetve, ha sok feladatot elrontanak, akkor az elért pontszám 60 pont alá süllyed, vagyis az üresen hagyott feladatlap szintje alá. Maximális, vagyis 150 pontos teljesítményt elérni nagyon nehéz, saját gyakorlatunkban még ilyen kiváló teljesítménnyel nem találkoztunk, viszont tudjuk, hogy nem lehetetlen.

A következőkben bemutatjuk az 1989-92. évi AHSME feladatait.

Az 1989. évi AHSME feladatai

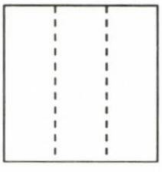
1. $(-1)^{5^2} + 1^{2^5} =$

(A) -7 (B) -2 (C) 0 (D) 1 (E) 57.

2. $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} =$

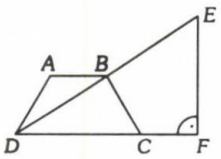
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{5}{12}$ (E) $\frac{7}{12}$.

3. Egy négyzetet az egyik oldalával párhuzamos két egyenessel három téglalapra bontunk. Ha mindegyik téglalap kerülete 24, akkor a négyzet területe



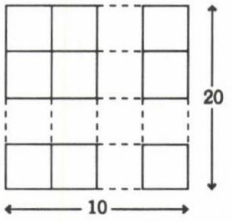
(A) 24 (B) 36 (C) 64 (D) 81
(E) 96.

4. Az $ABCD$ egyenlőszárú trapézban $AD = BC = 5$, $AB = 4$, $DC = 10$. A C pont a DF egyenesen van és B a DEF derékszögű háromszög DE átfogójának a felezőpontja. Ekkor $CF =$



(A) 3,25 (B) 3,5 (C) 3,75 (D) 4,0 (E) 4,25.

5. Egyenlő hosszúságú gyufaszálakból elkészítjük az ábrán látható rácsot. Ha a rács 20 gyufaszál magas és 10 gyufaszál széles, akkor a felhasznált gyufaszálak száma

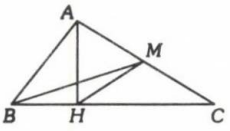


(A) 30 (B) 200 (C) 410 (D) 420 (E) 430.

6. Ha a, $b > 0$ és a koordináta tengelyek, valamint az $ax + by = 6$ egyenes által határolt első síknegyedbeli háromszög területe 6, akkor $ab =$

(A) 3 (B) 6 (C) 12 (D) 108 (E) 432.

7. Az ABC_{Δ}-ben az A-nál, B-nél, illetve C-nél levő szögek nagysága rendre 100°, 50° illetve 30°, az AH szakasz a magasság, BM pedig súlyvonal. Ekkor az $MHC\sphericalangle =$



(A) 15° (B) 22,5° (C) 30° (D) 40° (E) 45°.

8. Hány olyan n egész szám van 1 és 100 között, amelyre $x^2 + x - n$ előállítható két egész együtthatós elsőfokú polinom szorzataként?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 9 (E) 10.

9. Mr. és Mrs. Alfa gyereküknek, a kis Alfának két olyan keresztnevet szeretnének adni, hogy monogramja (a vezetéknév és a két keresztnév kezdőbetűi) ábécé szerinti sorrendben levő betűhármas legyen betűismétlés nélkül. Hány ilyen monogram lehetséges, ha a 26 betűs angol ábécé-t vesszük alapul?

(A) 276 (B) 300 (C) 552 (D) 600 (E) 15600.

10. Legyen $u_1 = a$ ($a \in \mathbf{R}^+$) és értelmezzük u_{n+1}-et az $u_{n+1} = -\dfrac{1}{u_n + 1}$ rekurzióval. Az alábbi n értékek melyikére lesz u_n ismét egyenlő a-val?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18.

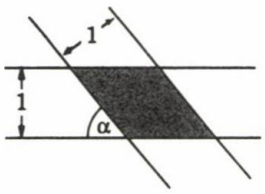
11. Legyenek a, b, c és d olyan pozitív egészek, amelyekre $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$. Ha $d < 100$, akkor az a lehetséges legnagyobb értéke

(A) 2367 (B) 2375 (C) 2391 (D) 2399 (E) 2400.

12. Egy kelet-nyugati irányú autóúton a járművek mindkét irányban 60 km/h állandó sebességgel mennek. Egy kelet felé tartó vezető 5 perc alatt 20 nyugat felé tartó járművel találkozik. Feltéve, hogy a nyugat felé tartó járművek egyenlő távolságban követik egymást, az alábbi értékek közül melyik közelíti legjobban az autóút egy 100 km hosszú szakaszán a nyugat felé tartó járművek számát?

(A) 100 (B) 120 (C) 200 (D) 240 (E) 400.

13. Két, egységnyi szélességű sáv α szögben metszi egymást. A mindkét sáv által lefedett (a besatírozott) rész területe



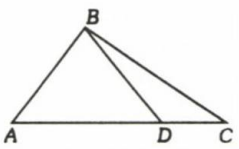
(A) $\sin\alpha$ (B) $\frac{1}{\sin\alpha}$ (C) $\frac{1}{1-\cos\alpha}$

(D) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$ (E) $\frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}$.

14. $\operatorname{ctg} 10° + \operatorname{tg} 5° =$

(A) $\frac{1}{\sin 5°}$ (B) $\frac{1}{\sin 10°}$ (C) $\frac{1}{\cos 5°}$ (D) $\frac{1}{\cos 10°}$ (E) $\sin 15°$.

15. Az ABC háromszögben $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 9$ és D az AC szakaszon van B-től 5 egységnyire. Határozzuk meg az $AD : DC$ arányt!



(A) 4 : 3 (B) 7 : 5 (C) 11 : 6
(D) 13 : 5 (E) 19 : 8.

16. Hány egész koordinátájú pont van azon a szakaszon, amelynek végpontjai (3; 17) és (48; 281). (A pontok közé a végpontokat is számoljuk be.)

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 16 (E) 46.

17. Egy egyenlő oldalú háromszög kerülete 1989 cm-rel több, mint egy négyzet kerülete. A háromszög oldala d cm-rel hosszabb a négyzet oldalánál. A négyzet kerülete pozitív. Hány olyan pozitív egész szám van, amely nem jöhet szóba d értékeként?

(A) 0 (B) 9 (C) 221 (D) 663 (E) végtelen sok.

18. Azoknak az x valós számoknak a halmaza, amelyre

$$x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

racionális, azonos az összes olyan x-ek halmazával, amelyre

(A) x egész (B) x racionális (C) x valós (D) $\sqrt{x^2+1}$ racionális
(E) $x+\sqrt{x^2+1}$ racionális.

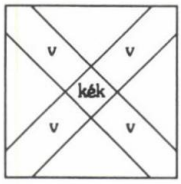
19. Egy háromszög köré kört írunk. A csúcsok a körvonalat 3, 4 és 5 egység hosszúságú részekre bontják. Mekkora a háromszög területe?

(A) 6 (B) $\frac{18}{\pi^2}$ (C) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$ (D) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+1)$ (E) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$.

20. Legyen x 100 és 200 között véletlenszerűen választott valós szám. Ha $[\sqrt{x}] = 12$, akkor mi annak a valószínűsége, hogy $[\sqrt{100x}] = 120$. ($[v]$ jelenti a v valós szám egész részét)

(A) $\frac{2}{25}$ (B) $\frac{241}{2500}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{96}{625}$ (E) 1.

21. Egy négyzet alakú zászlón a négyzet átlóira szimmetrikus egyenlő szélességű vörös csíkok egy kék négyzetben metszik egymást. Az egész kereszt a zászló 36 százalékát teszi ki. Hány százaléka a kék színű rész a zászló felületének?

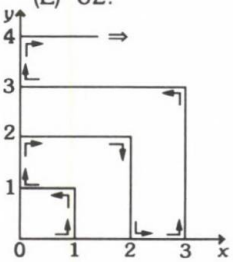


(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 6.

22. Egy építőkészlet 96 köve kétféle anyagból (műanyag és fa), 3 méretben (kicsi, közepes és nagy) 4 színben (kék, piros, zöld, sárga) és 4 formában (kör, hatszög, négyzet, háromszög) készült. Hány olyan kő van a készletben, amely a ,,műanyag közepes nagyságú piros körtől'' pontosan két tulajdonságban tér el?

(A) 29 (B) 39 (C) 48 (D) 56 (E) 62.

23. Egy részecske a koordinátarendszer első negyedében az origóból indulva a koordinátatengelyekkel párhuzamos útvonalon mozog az ábrán látható módon. Egy perc alatt egy egység utat tesz meg. Hol található a részecske az 1989. perc végén?



(A) (35; 44) (B) (36; 45) (C) (37; 45)
(D) (44; 35) (E) (45; 36).

24. Egy kerek asztal körül öt ember ül. Legyen $f \geq 0$ azoknak a személyeknek a száma, akiknek legalább egy szomszédja nő és legyen $m \geq 0$ azoknak a száma, akiknek valamelyik szomszédja férfi. Az összes lehetséges $(f; m)$ párok száma

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11.

25. Egy mezei futóversenyen két csapat indul 5-5 futóval. Az a futó, aki az n-edik helyen végez, n pontot szerez csapatának és az a csapat győz, amelyik kevesebb pontot ér el. Ha nincs holtverseny a versenyzők között, akkor hányféle pontszámot érhet el a győztes csapat?

(A) 10 (B) 13 (C) 27 (D) 120 (E) 126.

26. Írjunk egy kockába az oldallapok középpontjainak az összekötésével egy szabályos oktaédert! Az oktaéder és a kocka térfogatának aránya

(A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{16}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (E) $\frac{1}{4}$.

27. Legyen n egy pozitív egész szám. Ha a $2x + 2y + z = n$ egyenletnek 28 pozitív egész számhármas a megoldása, akkor $n =$

(A) 14 vagy 15 (B) 15 vagy 16 (C) 16 vagy 17 (D) 17 vagy 18 (E) 18 vagy 19.

28. Határozzuk meg a $\operatorname{tg}^2 x - 9\operatorname{tg} x + 1 = 0$ egyenlet $[0; 2\pi]$ intervallumba eső gyökeinek az összegét!

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) 3π (E) 4π.

29. Számítsuk ki $\sum_{k=0}^{49}(-1)^k\binom{99}{2k}$ értékét, ahol $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$.

(A) -2^{50} (B) -2^{49} (C) 0 (D) 2^{49} (E) 2^{50}.

30. Tegyük fel, hogy egy sorban 7 fiú és 13 lány áll. Legyen S azoknak a helyeknek a száma, ahol egy fiú és egy lány áll egymás mellett. Például LFFLLLFLFLLLFLFLLFLL esetén $S = 12$.
S átlagértékéhez a legközelebbi egész érték (ha az átlagolást ennek a 20 embernek az összes lehetséges sorrendjére elvégezzük)

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13.

A megoldási kulcs:

C-D-D-D-E-A-C-D-B-C-A-C-B-B-E-B-D-B-E-B-C-A-D-B-B-C-D-D-B-A.

Megjegyzések:

1. A 20. feladat megoldását könnyű eltéveszteni, ezért igen sokan a C választ ítélték helyesnek. A helyes megoldás:
$[\sqrt{x}] = 12 \Rightarrow 12 \le \sqrt{x} < 13$, $144 \le x < 169$, $[\sqrt{100x}] = 120$, $120 \le \sqrt{100x} < 121$, $12 \le \sqrt{x} < 12{,}1$, $144 \le x < 146{,}41$.

Így a valószínűség: $\frac{2{,}41}{25} = \frac{241}{2500}$.
A C válasz azért rossz, mert ha x-et 144 és 169 között véletlenszerűen választjuk, akkor az nem azonos azzal, hogy $\sqrt{x}$-et 12 és 13 között választjuk véletlenszerűen.

2. A 28. feladat is problémát okozott. Kétféle megoldását vázolom:

a) $\operatorname{tg}^2 x - 9\operatorname{tg} x + 1 = \frac{1 - 9\sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \frac{9}{2}\sin 2x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{2}{9} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\arcsin\frac{2}{9}}{2},\quad x_2 = \frac{\pi - \arcsin\frac{2}{9}}{2},\quad x_3 = \frac{2\pi + \arcsin\frac{2}{9}}{2},\quad x_4 = \frac{3\pi - \arcsin\frac{2}{9}}{2},$$

mivel $0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 2\pi$.
Innen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3\pi$.

b) Ha $b > 2$, akkor az $y^2 - by + 1 = 0$ egyenletnek az $y_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$ gyökei különbözőek és pozitívok. Ezenkívül $y_1 y_2 = 1$, vagyis

$$y_2 = \frac{1}{y_1} \Rightarrow \operatorname{tg} x_2 = \frac{1}{\operatorname{tg} x_1} = \operatorname{ctg} x_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right).$$

De $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ miatt négy gyök van $0 \le x \le 2\pi$ esetén az

$$x_1,\ x_1 + \pi,\ \frac{\pi}{2} - x_1,\ \frac{3\pi}{2} - x_1 \text{ és összegük } 3\pi.$$

Az 1989. évi AHSME feladatai

1. Ha $\frac{x/4}{2} = \frac{4}{x/2}$, akkor x értéke

(A) $\pm 1/2$ (B) ± 1 (C) ± 2 (D) ± 4 (E) ± 8.

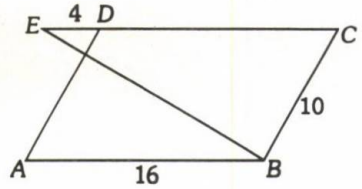
2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$

(A) -16 (B) $-\sqrt{2}$ (C) $-\frac{1}{16}$ (D) $\frac{1}{256}$ (E) $\sqrt{2}$

3. Egy trapéz egymás után következő szögei számtani sorozatot alkotnak. Ha a legkisebb szög 75°, akkor a legnagyobb

(A) 95° (B) 100° (C) 105° (D) 110° (E) 115°.

4. Legyen $ABCD$ egy olyan paralelogramma, amelyben $ABC\sphericalangle = 120°$, $AB = 16$ és $BC = 10$. Hosszabbítsuk meg a CD szakaszt D-n túl az E pontig úgy, hogy $DE = 4$ legyen. Ha $\overline{BE}$ az $\overline{AD}$ egyenest F-ben metszi, akkor FD értékét



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5 közelíti meg legjobban.

5. Az alábbi számok közül melyik a legnagyobb?

(A) $\sqrt{\sqrt[3]{5 \cdot 6}}$ (B) $\sqrt{6\sqrt[3]{5}}$ (C) $\sqrt{5\sqrt[3]{6}}$ (D) $\sqrt[3]{5\sqrt{6}}$ (E) $\sqrt[3]{6\sqrt{5}}$.

6. Az A és B pontok 5 egységre vannak egymástól. Egy, az A és B pontokat tartalmazó síkban hány olyan egyenes van, amely A-tól 2, B-től pedig 3 egységnyi távolságra van?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) több mint 3.

7. Egy háromszög oldalainak hossza egész szám, a kerülete 8. Ekkor a háromszög területe

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4 (E) $4\sqrt{2}$.

8. Az $|x-2|+|x-3|=1$ egyenlet valós megoldásainak száma

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) több mint 3.

9. Egy kocka minden élét kiszínezzük piros és fekete színnel úgy, hogy bármely lapon van legalább egy fekete él. Ekkor a fekete élek minimális száma

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6.

10. Egy $11 \times 11 \times 11$ méretű fakockát 11^3 darab egységkocka összeragasztásával készítettünk el. Legfeljebb hány egységkockát láthatunk egy rögzített külső pontból?

(A) 328 (B) 329 (C) 330 (D) 331 (E) 332.

11. Hány olyan 50-nél kisebb pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy pozitív osztóinak száma páratlan?

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11.

12. Az f függvényt az $f(x) = ax^2 - \sqrt{2}$ képlettel adjuk meg, ahol $a > 0$. Ha $f(f(\sqrt{2})) = -\sqrt{2}$, akkor a értéke

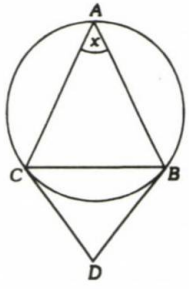
(A) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $2-\sqrt{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

13. Ha egy számítógép végrehajtja az alábbi utasításokat, akkor az 5. utasítás végrehajtásakor mennyi lesz X értéke?

1. Legyen X kezdőértéke 3, S-é pedig 0.
2. Növeld meg X értékét 2-vel!
3. Növeld meg S értékét X-szel!
4. Ha S értéke legalább 10 000, akkor hajtsd végre az 5. utasítást, ellenkező esetben pedig a 2. és a soron következő utasításokat!
5. Nyomtasd ki X értékét!
6. Stop.

(A) 19 (B) 21 (C) 23 (D) 199 (E) 201.

14. Az ABC egyenlőszárú hegyesszögű háromszögnek megrajzoljuk a körülírt körét, majd B-nél és C-nél meghúzzuk a kör érintőit, amelyek D-ben metszik egymást. Ha $ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 2CDB\sphericalangle$, és x a $CAB\sphericalangle$ radiánban mért értéke, akkor $x =$



(A) $\frac{3}{7}\pi$ (B) $\frac{4}{9}\pi$ (C) $\frac{5}{11}\pi$ (D) $\frac{6}{13}\pi$
(E) $\frac{7}{15}\pi$

15. Négy egész szám közül hármat-hármat összeadva 180, 197, 208 és 222 adódik eredményül. Melyik a négy szám legnagyobbika?

(A) 77 (B) 83 (C) 89 (D) 95
(E) a fenti adatok alapján nem lehet eldönteni.

16. George Washington egyik estélyén minden férfi kezet fogott mindenkivel a házastársát kivéve, azonban a nők egymással nem fogtak kezet. Ha 13 házaspár vett részt az estélyen, akkor hány kézfogás volt a 26 ember között?

(A) 78 (B) 185 (C) 23 (D) 312 (E) 325.

17. A 100, 101, ..., 999 számok közül hánynak a jegyei alkotnak szigorúan csökkenő vagy szigorúan növekvő sorozatot?

(A) 120 (B) 168 (C) 204 (D) 216 (E) 240.

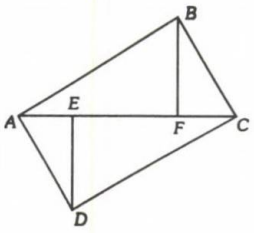
18. Az {1, 2, 3, ..., 99, 100} halmazból először az a számot választjuk ki véletlenszerűen, azután a b számot is ugyanebből a halmazból választjuk ki véletlenszerűen. Annak a valószínűsége, hogy a $3^a + 7^b$ számban az egyesek helyén nyolcas áll

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{4}$.

19. Hány olyan N egész szám van 1 és 1990 között, amelyre az $\frac{N^2+7}{N+4}$ törtkifejezés egyszerűsíthető?

(A) 0 (B) 86 (C) 90 (D) 104 (E) 105.

20. Az ábrán az $ABCD$ négyszögben A-nál és C-nél derékszög van. Az E és F pontokat úgy vettük fel AC-n, hogy $\overline{ED}$ és $\overline{FB}$ merőleges AC-re. Ha $AE = 3$, $DE = 5$ és $CE = 7$, akkor $BF =$



(A) 3,6 (B) 4 (C) 4,2 (D) 4,5
(E) 5.

21. Legyen $PABCD$ egy olyan gúla, amelynek $ABCD$ alaplapja egy egységnyi oldalú négyzet, és P egyenlő távolságra van az A, B, C, D csúcsoktól. Ha $APB\sphericalangle = 2x$, akkor a $PABCD$ gúla térfogata

(A) $\frac{\sin x}{6}$ (B) $\frac{\operatorname{ctg} x}{6}$ (C) $\frac{1}{6\sin x}$ (D) $\frac{1-\sin 2x}{6}$ (E) $\frac{\sqrt{\cos 2x}}{6\sin x}$.

22. Ha az $x^6 = -64$ egyenlet megoldásait $a + bi$ alakban írjuk (a, $b \in \mathbf{R}$), akkor azoknak a gyököknek a szorzata, ahol $a > 0$

(A) -2 (B) 0 (C) $2i$ (D) 4 (E) 16.

23. Ha $x, y > 0$, $\log_x y + \log_y x = \frac{10}{3}$ és $xy = 144$, akkor $\frac{x+y}{2}$

(A) $12\sqrt{2}$ (B) $13\sqrt{3}$ (C) 24 (D) 30 (E) 36.

24. Két középiskola – A és B – tanulói együtt vesznek részt egy vizsgán. Az alábbi táblázat a tanulók által elért pontszámok átlagait tartalmazza a fiúk, a lányok, a fiúk és lányok, valamint az A, a B, az A és B középiskolák szerinti bontásban.

	A iskola	B iskola	A és B iskolák
Fiúk	71	81	79
Lányok	76	90	?
Fiúk és Lányok	74	84	

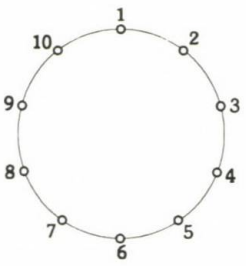
Határozzuk meg ezekből az adatokból azt, hogy az A és B iskolák összes lánytanulójának mennyi az átlaga!

(A) 81 (B) 82 (C) 83 (D) 84 (E) 85.

25. 9 egybevágó gömböt úgy helyezünk el egy egységkockában, hogy az egyiknek a középpontja a kocka középpontja legyen, a többi pedig érintse a kocka három oldallapját és a középső gömböt. Mekkora a gömbök sugara?

(A) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{4}$.

26. Egy kör kerülete mentén 10 tanuló áll. Mindegyik gondol egy számot. Ezután mindegyik megmondja a két szomszédjának az általa gondolt számot, utána kiszámolja és közli szomszédaival a két szomszédja által gondolt számok átlagát. Az ábráról leolvashatjuk, hogy ki milyen átlagot diktált be. Állapítsuk meg, hogy milyen számra gondolt az a személy, aki 6-ot mondott!



(A) 1 (B) 5 (C) 6 (D) 10
(E) a válasz nem egyértelmű.

27. Az alábbi számhármasok közül melyik nem lehet egy háromszög három magasságvonalának hossza?

(A) $1, \sqrt{3}, 2$ (B) 3, 4, 5 (C) 5, 12, 13 (D) $7, 8, \sqrt{113}$ (E) 8, 15, 17.

28. Egy húrnégyszög egymást követő oldalai rendre 70, 90, 130 és 110 egység hosszúak. Ez a négyszög egyúttal érintőnégyszög is. A beírt körnek a 130 hosszúságú oldalon levő érintési pontja ezt az oldalt x és y hosszúságú szakaszokra bontja. Ekkor $|x - y| =$

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16.

29. Az 1, 2, ..., 100 számoknak egy részhalmaza olyan tulajdonságú, hogy egyetlen elemének sem tartalmazza a háromszorosát. Legfeljebb hány elemű lehet egy ilyen tulajdonságú részhalmaz?

(A) 50 (B) 66 (C) 67 (D) 76 (E) 78.

30. Ha $R_n = \frac{1}{2}(a^n + b^n)$, ahol $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 3 - 2\sqrt{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, akkor R_{12345} egy egész szám. R_{12345} utolsó számjegye:

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9.

A megoldási kulcs:

E-E-C-B-B-D-A-E-B-D-C-D-E-A-C-C-C-C-B-C-E-D-B-D-B-A-C-B-D-E.

Megjegyzés:

A 13. feladat szövegezése szokatlan volt, ezért a tanulók nehezen értették meg. Nyilvánvaló, hogy az $S = 5 + 7 + 9 + \ldots + X$ számtani sorozatnak $1 + \frac{x-5}{2}$ tagja van, ezért $S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x-5}{2}\right)(5 + x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 4 \geq 10000$, tehát $\frac{x+1}{2} > 100$, de x páratlan, ezért 201 a kinyomtatott érték.

Dr. Benkő József

„Rendezett" és „rendezetlen" összegzés II.

Összegezhető pozitív függvények

Eddig csak az $a = (a_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ valós számsorozatok összegét értelmeztük, éspedig a $\lim_{n\to\infty}(a_0+\ldots+a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sorösszegként és láttuk, hogy az ebben az értelemben összeadott $a(n) = a_n$ függvényértékek szerepe nemcsak attól függött, hogy az a_n valós számok mekkorák és hányszor fordulnak elő, hanem attól is, hogy az n index által megszabott hányadik helyen szerepelnek az összegben (permutáláskor az értékek és az előfordulások számai változatlanok maradnak, a helyek ellenben felcserélődnek és – amint az a leglátványosabban a Riemann-féle tételből olvasható ki –, a sor konvergenciája, valamint összege megváltozik). Ezek után az összegezésnek egy „helytől-független" módját fogjuk értelmezni. A hely-kitüntetés („n-edik", „szomszédos", stb.) bárminemű felbukkanásának kiküszöbölésére, a továbbiakban lemondunk **N**-ről, helyette egy tetszőleges (végtelen) X halmazt veszünk és az $a: X \to \mathbf{R}$ alakú függvények „összegét" értelmezzük. E célból bevezetjük az X halmaz véges – részhalmazainak $\mathcal{J}(x)$ családját és mindegyik $F = \mathcal{J}(x)$-re képezzük az a függvény F-en felvett összes értékeinek (véges) $\sum\{a(x) | x \in F\}$ összegét, amit $S_F(a)$-val fogunk jelölni. A fölösleges technikai bonyodalmak elkerülésére, először csak a pozitív, $a: X \to \mathbf{R}^+$ alakú, függvényekkel foglalkozunk. Ekkor $F \subset F'$ esetén: $S_F(a) \le S_{F'}(a)$, tehát az $F \to S_F(a)$: $\mathcal{J}(x) \to \mathbf{R}^+$ növekvő (ha $\mathcal{J}(x)$-et a $\subset$ „benne foglalással", míg $\mathbf{R}^+$-t a természetes módon rendezzük).

Definíció.

Az $a: X \to \mathbf{R}^+$ függvényt összegezhetőnek mondjuk, ha véges összegeinek $\{S_F(a) \mid F \in \mathcal{J}(x)\}$ halmaza felülről korlátos; összegének pedig e halmaz legkisebb felső korlátját mondjuk és $S_X(a) = \sup\{S_F(a) \mid F \in \mathcal{J}(x)\}$.

Az összegezhető függvények halmazát így jelöljük $l(X, \mathbf{R}^+)$, míg S_X: $l(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}^+$ az összegzés művelete.

Először a kommutativitás kérdését tisztázzuk. E célból észrevesszük, hogy:

(14) Ha π: $Y \to X$ tetszőleges injektív leképzés és $a: X \to \mathbf{R}^+$ összegezhető, akkor az $a \circ \pi$: $Y \to \mathbf{R}$ összetett függvény is összegezhető és $S_Y(a \circ p) \le S_X(a)$.

[Valóban, ha $E \subset Y$ véges, akkor $\pi(E) = \{\pi(y) \mid y \in E\}$ is véges és $S_E(a \circ \pi) = S_{\pi(E)}(a)$, tehát $\{S_E(a \circ \pi) \mid E \in \mathcal{J}(Y)\} \subset \{S_F(a) \mid F \in \mathcal{J}(X)\}$ és ebből kifolyólag az utóbbi (nagyobb) halmaz felső-korlátossága maga után vonja a kisebbiket, valamint azt, hogy $S_Y(a \circ \pi) = \sup\{S_E(a \circ \pi) \mid E \in \mathcal{J}(Y)\} \le \sup\{S_F(a) \mid F \in \mathcal{J}(X)\} = S_X(a)$.] Ha $Y \subset X$ és $\pi(y) = y$ a természetes injekciót jelenti, akkor (14)-ből következik, hogy:

(14') Ha a: $X \to \mathbf{R}^+$ összegezhető, akkor bármely $Y \subset X$-re a leszűkített $a|_Y$: $Y \to \mathbf{R}^+$ is összegezhető és $S_Y(a|_Y) \le S_X(a)$.

Ha $Y = X$ és $\pi: X \to X$ egy tetszőleges bijekció, akkor (14')-ből következik az általános kommutativitási elv:

(14") Ha a: $X \to \mathbf{R}^+$ összegezhető és π: $X \to X$ bijektív, akkor $a \circ \pi$ is összegezhető és $S_X(a \circ \pi) = S_X(a)$.

Az asszociativitás igen általános elvét adja a következő tétel:

(15) Adottak az X halmaz, az $a: X \to \mathbf{R}^+$ leképzés és X-nek egy tetszőleges *diszjunkt* felbontása: $X = \coprod_{y \in Y} X_y$, ($\coprod$ a diszjunkt egyesítés jele). Ezekre nézve, a következő két állítás egyenértékű:

(i) a összegezhető

(ii) bármely $y \in Y$-ra az $a|_{X_y}: X_y \to \mathbf{R}$ leképezés összegezhető és a $b(y) = S_{X_y}(a|_{X_y})$ képlettel értelmezett $b: Y \to \mathbf{R}^+$ is összegezhető és $S_Y(b) = S_X(a)$.

[*Bizonyítás. (i)* $\Rightarrow$ *(ii).* Legyen $E \subset Y$ véges, n pedig E elemeinek száma. A tetszőlegesen választott $\varepsilon > 0$-ra és mindegyik $y \in E$-re kiválasztunk egy olyan $F_y \subset X_y$ véges részhalmazt, amelyre: $S_{F_y}(a) \geq S_{X_y}(a) - \frac{\varepsilon}{n}$. Ezeket összeadva a véges számú $y \in E$-re és F-fel jelölve az $\coprod_{y \in E} F_y$ véges halmazt, azt kapjuk, hogy: $S_F(a) = \sum_{y \in E} S_{F_y}(a) \geq \sum_{y \in E} \left\{ S_{F_y}(a) - \frac{\varepsilon}{n} \right\} =$ $= S_E(b) - \varepsilon$. Végső soron $S_E(b) \leq S_X(a) + \varepsilon$, tehát $S_E(b) \leq S_X(a)$ (hisz $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi volt).

(ii) $\Rightarrow$ *(i).* Az $F \subset X$ véges halmazra vesszük azokat az $y \in Y$ indexeket, amelyre $F \cap X_y \neq \emptyset$; az így kijelölt $E = \{y \in Y \mid X_y \cap F \neq \emptyset\}$ halmaz véges. Mivel $S_F(a) = \sum\{a(x) \mid x \in F\} =$ $= \sum_{y \in E} \left\{ \sum \{a(x) | x \in X_y \cap F\} \right\} \leq \sum_{y \in E} b(y) = S_E(b)$ ezért $S_X(a) \leq S_Y(b)$.]

Ennek a tételnek speciális eseteként kapjuk az alábbi ún. iteráltösszegezésre vonatkozó eredményt:

(15') Az adott az X és Y halmazok Descartes-féle szorzatán értelmezett $a: X \times Y \to \mathbf{R}^+$ leképzésre az alábbi állítások egyenértékűek:

(i) a összegezhető;

(ii) mindegyik rögzített $y \in Y$-ra az $a(y): X \to \mathbf{R}^+$ leképzés összegezhető és a $b(y) = S_X(a(y))$ képlettel értelmezett $b: Y \to \mathbf{R}^+$ szintén összegezhető. Ha az állítások igazak, akkor $S_Y(b) = S_{X \times Y}(a)$.

(A tételt úgy kapjuk, hogy (15)-ben X_y -t $X \times \{y\}$-nak vesszük és felhasználjuk az $X \times Y = \coprod_{y \in Y} X \times \{y\}$ egyenlőséget.)

Megjegyzés: Az $S_Y(b) = S_Y(S_X(a))$ összeget a kétváltozós $a: X \times Y \to \mathbf{R}$ függvény iterált-összegének hívjuk (éspedig először összegzünk $x \in X$-re – rögzített $y \in Y$ mellett – majd az így kapott összegeket összegezzük $y \in Y$-ra). A tétel értelmében az iterált-összeg egyenlő az ún. $S_{X \times Y}(a)$,,dupla összeg''-gel. Az is világos, hogy az iterálás sorrendje nem játszik szerepet, azaz $S_{X \times Y}(a) = S_X(S_Y(a))$ is igaz.

A pozitív leképezések összegzésének algebrai és rendezési tulajdonságait tisztázza a következő tétel:

(16) (i) Ha $a, b \in \ell(X, \mathbf{R}^+)$, akkor $a + b \in \ell(X, \mathbf{R}^+)$ és $S_X(a + b) = S_X(a) + S_X(b)$; ($S_X$ - additív).

(ii) Ha $a \in \ell(X, \mathbf{R})$ és $\alpha \in \mathbf{R}$, akkor $\alpha a \in \ell(X, \mathbf{R})$ és $S_X(\alpha a) = \alpha S_X(a)$; ($S_X$ - pozitív homogén).

(iii) Ha $a \in \ell(X, \mathbf{R})$ és $b: X \to \mathbf{R}^+$-ra: $b \leq a$, akkor $b \in \ell(X, \mathbf{R}^+)$ és $S_X(b) \leq S_X(a)$; (S_X - monoton).

Röviden (i) és (ii) azt jelenti, hogy $\ell(X, \mathbf{R}^+)$ ún. pozitív kónusz, S_X pedig pozitív-lineáris leképezés. (iii)-t gyakran összehasonlítási kritériumnak mondják; (ha elég sok, a szerepét játszó tesztfüggvényt ismerünk, akkor igen alkalmatos a különféle b-k összegezhetőségének igazolására).

[*Bizonyítás.* Ha $F \in \mathcal{F}(x)$, akkor $S_F(a + b) =$ $= \sum\{a(x) + b(x) \mid x \in F\} = \sum\{a(x) \mid x \in F\} + \sum\{b(x)$

$|x \in F\} = S_F(a) + S_F(b)$, ill. $S_F(\alpha a) = \alpha S_F(a)$; a többi a supremum tulajdonságaiból adódik.

Ha $0 \le b(x) \le a(x)$, $\forall x \in X$-re, akkor $S_F(b) \le S_F(a)$, $\forall F \in \mathcal{J}(x)$-re és következik: $S_X(b) \le S_X(a)$.]

A (16) (iii) és (15) kombinációjából adódik a következő ún. kondenzációs kritérium:

(17) Adottak az $a: X \to \mathbf{R}^+$, $X = \coprod_{y \in Y} X_y$ egy diszjunkt felbontás, melyben Y tetszőleges, de mindegyik X_y véges (legyen $n(y)$ az X_y elemeinek száma), valamint m, $M: Y \to \mathbf{R}^+$ úgy, hogy $m(y) \le a(x) \le M(y)$, $y \in Y$ és $x \in X_y$-ra. A $b(y) = m(y)n(y)$, ill. $C(y) = M(y)n(y)$ képletekkel értelmezett b, $c: Y \to \mathbf{R}^+$ leképezések és az a összegezhetőségét, viszonyát tisztázza az alábbi két állítás:

(i) Ha $a \in \ell(X, \mathbf{R}^+)$, akkor $b \in \ell(Y, \mathbf{R}^+)$.

(ii) Ha $c \in \ell(Y, \mathbf{R}^+)$, akkor $a \in \ell(X, \mathbf{R}^+)$.

Végezetül még két tulajdonság:

(18) (*Az összegezhetőség transzfinit jellege*) Ha a, $b: X \to \mathbf{R}^+$ közül egyik összegezhető, egymástól pedig csak véges számú ponton különböznek, akkor a másik is összegezhető.

[*Bizonyítás.* Legyen $a \in \ell(X, \mathbf{R}^+)$ és $F_0 = \{x \in X \mid a(x) \ne b(x)\} \in \mathcal{J}(x)$. Ekkor, bármely $F \in \mathcal{J}(x)$-re:

$S_F(b) = \sum\{b(x) \mid x \in F\} = \sum\{b(x) - a(x) \mid x \in F_0\} +$

$+ \sum\{a(x) \; x \in F_0\} \le S_{F_0}(a + b) + S_F(a) \le$

$\le S_{F_0}(a + b) + S_X(a)$, tehát $\{S_F(b) \mid F \in \mathcal{J}(x)\}$ korlátos, azaz b összegezhető.

(19) (*Az összegezés megszámlálható jellege és a nulla értékek semmissége*) Az $a: X \to \mathbf{R}^+$ esetén legyen $X_0 = \{x \in X \mid a(x) = 0\}$ és $X^+ = \{x \in X \mid a(x) > 0\}$. Ekkor a és $a|_{X^+}$ egyidejűleg összegezhetők (vagy sem) és $S_X(a) = S_{X^+}(a|_{X^+})$ – ha összegezhetők, akkor ráadásul: X^+ legfeljebb megszámlálhatóan végtelen.

[*Bizonyítás.* Bármely $F \in \mathcal{J}(x)$-re: $S_F(a) = S_{F \cap X^+}(a)$, tehát egyidejűleg korlátosak és (ha igen akkor) legkisebb felső korlátjuk azonos.

Tetszőleges $\alpha > 0$-ra az $X_\alpha = \{x \in X \mid a(x) \ge \alpha\}$ halmaznak legfeljebb $\frac{1}{\alpha} S_X(a)$ eleme lehet, mert ha $x_1, \ldots, x_n \in X_\alpha$, akkor $S_X(a) \ge S_{\{x_1, \ldots, x_n\}}(a) = a(x_1) + \ldots + a(x_n) \ge n\alpha$.

Mivel az $X_{\frac{1}{n}}$ alakú halmazok végesek és $X^+ = \bigcup_{n \in N^*} X_{\frac{1}{n}}$, ezért X^+ legfeljebb megszámlálhatóan végtelen.]

Tetszőleges előjelű összegezhető függvények

Egy $a: X \to \mathbf{R}$ függvény *pozitív felbontásán* bármely $a = a_1 - a_2$ alakú felírását értjük, ahol $a_1, a_2: X \to \mathbf{R}^+$ pozitív függvények. Ilyen esetben bármely $b: X \to \mathbf{R}^+$ egy újabb $a = (a_1 + b) - (a_2 + b)$ pozitív felbontást szolgáltat. A sokféle felbontás közül kitűnik az ún. pozitív, ill. negatív-részre való felbontás, éspedig: ha

$$\begin{cases} a^+ = \max\{a, 0\}, \text{ azaz } a^+(x) = \max\{a(x), 0\}, \\ a^- = \max\{-a, 0\}, \text{ azaz } a^-(x) = \max\{-a(x), 0\} \end{cases}$$

akkor $\begin{cases} a = a^+ - a^-, \\ |a| = a^+ + a^-, \\ 0 = a^+ \cdot a^- \end{cases}$

Az alábbi tétel, a továbbiakra nézve, döntő fontosságú:

(20) Egy $a: X \to \mathbf{R}$ függvényre az alábbi három állítás egyenértékű:

(i) létezik olyan $a = a_1 - a_2$ pozitív felbontás, amelyre $a_1, a_2 \in \ell(X, \mathbf{R}^+)$;

(ii) $a^+, a^- \in \ell(X, \mathbf{R}^+)$;

(iii) $|a| \in \ell(X, \mathbf{R}^+)$;

Ráadásul, ha e feltételek teljesülnek, akkor $S_X(a_1) - S_X(a_2) = S_X(a^+) - S_X(a^-)$ tehát a baloldal csakis a-tól függ és nem a felbontásban szereplő a_1, a_2 függvényektől.

[*Bizonyítás.* *(i)* $\Rightarrow$ *(iii)* $|a| = |a_1 - a_2| \leq$ $\leq |a_1| + |a_2| = a_1 + a_2 \in \ell(X, \mathbf{R}^+)$, tehát a is összegezhető (itt a (16)-beli (i) és (iii) tulajdonságokra alapoztunk).

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*, mivel $0 \leq a^{\pm} \leq a^+ + a^- = |a|$, ismét hivatkozhatunk az összehasonlítási kritériumra ((16) (iii))

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* hisz maga az $a = a^+ - a^-$ egy pozitív felbontás. Az állítás második része is (16)-ból következik, mert $a_1 - a_2 = a^+ - a^-$ maga után vonja az $a_1 + a^- = a_2 + a^+$ egyenlőséget, ebből pedig az $S_X(a_1) + S_X(a^-) = S_X(a_2) +$ $+ S_X(a^+)$ adódik.]

Definíció.

Az előző tétel feltételeit kielégítő függvényeket összegezhetőnek mondjuk (az angol „un-ordered summation"-nak megfelelő rendezetlen-összegzés rövidítéseként); halmazukat $\ell(X, \mathbf{R})$-rel jelöljük, az $S_X(a^+) - S_X(a^-)$ számot pedig a függvény rendezetlen-összegének hívjuk és $S_X(a)$-val jelöljük; a (rendezetlen) összegzés sémája tehát az $S_X: \ell(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ leképezés.

Az összegzés rendezetlenségét az alábbi általános kommutativitási törvény fejezi ki:

(21) Ha $a \in \ell(X, \mathbf{R})$ és $\pi: Y \to X$ egy tetszőleges injektív leképezés, akkor $a \circ \pi \in \ell(Y, \mathbf{R})$. Ha ráadásul π bijektív, akkor $S_Y(a \circ \pi) = S_X(a)$. (Speciálisan, ha $X = Y$ és $\pi: X \to X$ bijekció, akkor $S_X(a) = S_X(a \circ \pi)$, ami az S_X összegezés kommutativitását jelenti.)

[*Igazolás:* Mivel $(a \circ \pi)^+(y) = \max\{a \circ \pi(y), 0\} =$ $= \max\{a(\pi(y)), 0\} = a^+(\pi(y)) = a^+ \circ \pi(y)$ és hasonlóan $(a \circ \pi)^-(y) = a^- \circ \pi(y)$, ezért az $a = a^+ - a^-$ felbontásának az $a \circ \pi = a^+ \circ \pi - a^- \circ \pi$ felel meg és (14)-re, valamint a definícióra hivatkozva kapjuk, hogy $a \circ \pi \in \ell(Y, \mathbf{R})$. Ha π bijektív, akkor $S_Y(a^{\pm} \circ \pi) = S_X(a^{\pm})$ tehát $S_Y(a \circ \pi) =$ $= S_Y(a^+ \circ \pi) - S_Y(a^- \circ \pi) = S_X(a^+) - S_X(a^-) = S_X(a)$.]

Az asszociativitás általános törvénye szintén érvényben marad:

(22) Ha $a \in \ell(X, \mathbf{R})$ és $X = \coprod_{y \in Y} X_y$, akkor $a|_{X_y} \in \ell(X_y, \mathbf{R})$ és a $b(y) =$ $= S_{X_y}(a|_{X_y})$ képlettel értelmezett $a: Y \to \mathbf{R}$ leképezés is összegezhető és $S_Y(b) = S_X(a)$.

[*Igazolás.* Az előző tétel alapján $a|_{X_y}$ összegezhető, tehát az $(a|_{X_y})^{\pm}$ pozitív függvények is azok. Mivel $z \in X_y$-ra $a^+|_{X_y}(z) = (a|_{X_y})^+(z)$, tehát $a^+|_{X_y} = (a|_{X_y})^+$ és hasonlóan $a^-|_{X_y} =$ $= (a|_{X_y})^-$, s ezért $b(y) = S_{X_y}(a|_{X_y}) =$ $= S_{X_y}(a|_{X_y})^+ - S_{X_y}(a|_{X_y})^- = S_{X_y}(a^+|_{X_y}) -$ $- S_{X_y}(a^-|_{X_y}) \overset{def}{=} b_1(y) - b_2(y)$. A pozitív függvényekre vonatkozó (15) tétel alapján: $S_Y(b_1) = S_Y(S_{X_y}(a^+|_{X_y})) = S_X(a^+)$ és $S_Y(b_2) =$ $= S_X(a^-)$, tehát a $b = b_1 - b_2$ pozitív felbontásból és az összeg értelmezéséből adódik, hogy $S_Y(b) = S_Y(b_1) - S_Y(b_2) = S_X(a^+) -$ $S_X(a^-) = S_X(a)$.]

A pozitív függvények esetével ellentétben, az általános előjelű függvényekre nem igaz, hogy az iterált-összegezhetőség maga után

vonja az összegezhetőséget, de bizonyos többletfeltétel mellett a megfordítás lehetséges:

(23) Ha az $a: X \to \mathbf{R}$ leképezés az $X = \coprod_{y \in Y} X_y$ felbontás minden tagján állandó előjelű (az $a\big|_{X_y}$ előjele állandó, de függhet y-tól) és összegezhető és a $b(y) = S_{X_y}(a\big|_{X_y})$ képlettel értelmezett $b: Y \to \mathbf{R}$ leképzés összegezhető, akkor a is az.

(*Igazolás.* Ha $a\big|_{X_y} \geq 0$, akkor $a\big|_{X_y} = a^+\big|_{X_y}$, tehát $b(y) = S_{X_y}(a\big|_{X_y}) \geq 0$ és ezért $b^+(y) = b(y)$. Ugyanebben az esetben $b^-(y) = 0$ és $S_{X_y}(a^-\big|_{X_y}) = 0$. Végsősoron: $b^{\pm}(y) = S_{X_y}(a^{\pm}\big|_{X_y})$. Az állítás (hasonló meggondolással) érvényes az $a\big|_{X_y} \leq 0$ esetekben is. A $b^{\pm}$ (feltétel szerint) összegezhetősége (15) alapján, az $a^{\pm}$ leképzések X feletti összegezhetőségét implikálja, tehát, definíció szerint: $a \in l(X, \mathbf{R})$.]

Ami az $S_X: l(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ összegezés algebrai struktúráját illeti, a (16)-beli állítások szinte maradék nélkül kiterjeszthetők:

(24) (i) Ha $a, b \in l(X, \mathbf{R})$, akkor $a + b \in l(X, \mathbf{R})$ és $S_X(a + b) = S_X(a) + S_X(b)$.

(ii) Ha $a \in l(X, \mathbf{R})$ és $\alpha \in \mathbf{R}$, akkor $\alpha a \in l(X, \mathbf{R})$ és $S_X(\alpha a) = \alpha S_X(a)$.

(iii) Ha $a, b \in l(X, \mathbf{R})$ és $a \leq b$, akkor $S_X(a) \leq S_X(b)$.

Röviden: (i) és (ii) azt jelenti, hogy $l(X, \mathbf{R})$ egy valós vektortér, S_X pedig lineáris, (iii) szerint pedig monoton.

[Igazolás.

(i) Mivel $a + b = (a^+ - a^-) + (b^+ - b^-) = (a^+ + b^+) - (a^- + b^-)$ egy pozitív felbontása az összegnek, ezért a definíció alapján: $S_X(a + b) = S_X(a^+ + b^+) - S_X(a^- + b^-)$ amit (16)-ot követve folytathatunk: $= \{S_X(a^+) + S_X(b^+)\} - \{S_X(a^-) + S_X(b^-)\} = \{S_X(a^+) - S_X(a^-)\} + \{S_X(b^+) - S_X(b^-)\} = S_X(a) + S_X(b)$.

(ii) $\alpha > 0$ esetén: $\alpha a = \alpha(a^+ - a^-) = \alpha a^+ - \alpha a^-$, tehát $S_X(\alpha a) = S_X(\alpha a^+) - S_X(\alpha a^-) = \alpha S_X(a^+) - \alpha S_X(a^-) = \alpha S_X(a)$.

$\alpha < 0$ esetén: $\alpha a = \alpha(a^+ - a^-) = (-\alpha)a^- - (-\alpha)a^+$ – pozitív felbontás, tehát $S_X(\alpha a) = S_X((-\alpha)a^-) - S_X((-\alpha)a^+) = (-\alpha)S_X(a^-) - (-\alpha)S_X(a^+) = \alpha\{S_X(a^+) - S_X(a^-)\} = \alpha S_X(a)$.

(iii) Az $a^+ - a^- \leq b^+ - b^-$ maga után vonja, hogy $a^+ + b^- \leq a^- + b^+$, tehát $S_X(a^+) + S_X(b^-) = S_X(a^+ + b^-) \leq S_X(a^- + b^+) = S_X(a^-) + S_X(b^+)$, azaz $S_X(a) = S_X(a^+) - S_X(a^-) \leq S_X(b^+) - S_X(b^-) = S_X(b)$.]

Végezetül megjegyezzük, hogy az $a = a^+ - a^-$ felbontáson keresztül az összegezhetőség transzfinit-, valamint megszámlálható jellege a pozitív $a^{\pm}$-ról a tetszőleges előjelű a-ra is átterjed.

A különbség N esetén

Visszatérve az $X = \mathbf{N}$ esetre, először is összevetjük az összegzésnek előbb tárgyalt két módját: a $\sum_{n=0}^{\infty} : \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ sorösszegzést az $S_{\mathbf{N}}: l(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ rendezetlen – összegzéssel. Pozitív függvények esetén – semmi különbség:

(25) $\Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R}^+) = l(\mathbf{N}, \mathbf{R}^+)$ és tetszőleges összegezhető $a: \mathbf{N} \to \mathbf{R}^+$-re $S_{\mathbf{N}}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

[*Bizonyítás.* Ha az $F \subset \mathbf{N}$ véges részhalmaz legnagyobb elemét n_F-fel jelöljük, akkor $F \subset \{0, 1, \ldots, n_F\}$ és $S_F(a) \leq \sum_{n=0}^{n_F} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, tehát $S_{\mathbf{N}}(a) \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. A fordított egyenlőtlenség evi-

dens, hisz $\sum_{n=0}^{m} a_n = S_{\{0,1,\dots,m\}}(a) \le S_{\mathbf{N}}(a)$, tehát $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \le S_{\mathbf{N}}(a)$.]

Tetszőleges előjelű függvények esetén csak az alábbi állítás érvényes.

(26) $\ell(\mathbf{N}, \mathbf{R}^+) \subset \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, de továbbra is bármely összegezhető $a = (a_n)$ $(n \in \mathbf{N})$-re $S_{\mathbf{N}}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

[*Bizonyítás.* Az $a = a^+ - a^-$ felbontásnak megfelelően, ha $s_n = a_0 + \dots + a_n$ és $s_n^{\pm} = a_0^{\pm} + \dots + a_n^{\pm}$, akkor $s_n = s_n^+ - s_n^-$. Értelmezés szerint $a \in \ell(\mathbf{N}, \mathbf{R}^+)$ azt jelenti, hogy $a^{\pm} \in \ell(\mathbf{N}, \mathbf{R}^+)$, tehát az előző tétel értelmében léteznek a $\lim_{n\to\infty} s_n^{\pm} = S_{\mathbf{N}}(a^{\pm})$ határértékek, s ebből kifolyólag létezik $\lim_{n\to\infty} s_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\right) =$ $= \lim_{n\to\infty}(s_n^+ - s_n^-) = \lim_{n\to\infty} s_n^+ - \lim_{n\to\infty} s_n^- = S_{\mathbf{N}}(a^+) -$ $- S_{\mathbf{N}}(a^-) = S_{\mathbf{N}}(a)$.]

Az $\ell(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \subset \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ tartalmazás szigorú, de ennek ellenére az $\ell(\mathbf{N}, \mathbf{R})$-hez tartozás a sorok segítségével is jellemezhető. Íme az ezt tartalmazó alapfontosságú tétel:

(27) Egy $a = (a_n)$ $(n \in \mathbf{N})$: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ leképezésre a következő állítások egyenértékűek:

(i) $a \in \ell(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, azaz a (rendezetlenül-) összegezhető;

(ii) $|a| \in \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R}_+)$, azaz a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ sor konvergál;

(iii) $a^{\pm} \in \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R}^+)$;

(iv) bármely $\pi: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekcióra az $a \circ \pi$ összetétel $\Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R})$-hez tartozik és a megfelelő $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ sor-összeg π-től független.

Megjegyzés. Az (i) $\Leftrightarrow$ (iv) ekvivalencia alapján mondható, hogy az $S_{\mathbf{N}}(a)$ a-nak rendezetlen-összege. Az (i) $\Leftrightarrow$ (ii) alapján a rendezetlen-összegzést abszolút-sor-összegzésnek is mondhatjuk. A ,,rendezetlen'' helyett a ,,*feltételnélküli*''- összegzés is használatos, ilyenkor a $\Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \setminus \ell(\mathbf{N}, \mathbf{R})$-hez rendelt sorokat *feltételesen konvergenseknek* mondjuk.

(*Bizonyítás.* Mivel $\ell(\mathbf{N}, \mathbf{R}^+) = \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R}^+)$, ezért az $\ell(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ definíciója szerint az (i), (ii) és (iii) állítások egyenértékűek. Az (i) $\Rightarrow$ (iii) implikáció (25)-ből adódik, hisz $a \in \ell(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \Rightarrow a \circ \pi \in$ $\in \ell(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \Rightarrow a \circ \pi \in \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R})$; ugyanakkor $S_{\mathbf{N}}(a) = S_{\mathbf{N}}(a \circ \pi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$, tehát az összeg π-től való függetlenségét biztosítja.

Befejezésül a (iv) $\Rightarrow$ (iii) implikációt igazoljuk: Tegyük fel (ad absurdum), hogy $a^+ \notin \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R}^+)$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor a végtelenhez tart. Mivel (iv) szerint a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergál, ezért szükséges, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ sor is a végtelenhez tartson (hisz $s_n = s_n^+ - s_n^-$). Ugyanakkor a Σa_n konvergencia alapján: $a_n \to 0$, ami az $(a_n^{\pm} \to 0)$-t vonja maga után. Ezek alapján egy tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$-t választva, (8)-as tétel alapján, megszerkesztünk egy olyan $\pi: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekciót, amelyre nézve $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha$; az összeg tehát π-től függ.)

E tétel jól illusztrálható a hiperharmonikusnak nevezett $\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ $(n \in \mathbf{N}^*,\ \alpha \in \mathbf{R})$, sorozat alábbi eseteivel:

(28) (i) A hiperharmonikus $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) pozitív sorozat pontosan $\alpha > 1$-re összegezhető (tartozik $\ell(\mathbf{N}, \mathbf{R})$-hez).

(ii) Az alternáló hiperharmonikus $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) sorozat $\alpha > 1$-re összegezhető, míg $0 < \alpha \leq 1$-re a $\Sigma(\mathbf{N}^*, \mathbf{R}) \setminus \ell(\mathbf{N}^*, \mathbf{R})$ különbséghez tartozik, tehát csak feltételesen összegezhető.

(iii) $\left(\frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}\right)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) sorozat $\alpha > 1$-re összegezhető, míg $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$-re csak feltételesen összegezhető.

(*Útmutatás.* (i) esetén javasoljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor egymás után következő tagjait 2, 2^2, ..., 2^k, ... tagú csoportokba foglalni és a k-ik csoportban a következő minorálást, ill. majorálást végezni:

$$\frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k = \frac{2^k}{(2^{k+1})^\alpha} < \frac{1}{(2^k)^\alpha} + \frac{1}{(2^k+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^k+2^k-1)^\alpha} < \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k.$$

Ezek után hivatkozunk arra a jól ismert tényre, hogy az $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ún. mértani sor pontosan a $|q| < 1$-re konvergál (abszolút értelemben). Tehát a $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$, választással a (i) állítás a (17)-beli kondenzációs-kritériumból adódik. (ii)-ben és (iii)-ban az $\alpha > 1$ eset (27 alapján (i)-ből következik. (ii)-ben $\alpha > 0$-ra a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ konvergenciáját a Leibniz-féle kritérium biztosítja. (iii)-ban $\alpha > \frac{1}{2}$ esetén az alábbi egyenlőtlenséget használhatjuk: $\frac{1}{k^{\alpha-1}(k+1)^\alpha} + \frac{1}{(k+1)^{2\alpha-1}} < \frac{1}{(k^2)^\alpha} + \frac{1}{(k^2+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(k^2+2k)^\alpha} < \frac{1}{k^{2\alpha-1}} + \frac{1}{k^\alpha(k+1)^{\alpha-1}}$, majd a Leibniz-kritériumra hivatkozunk.)

Az $\ell(\mathbf{Z})$ konvolúciós algebra

Mérlegelve az eddig tárgyalt eredményeket, egyesek a sorok, mások pedig a rendezetlen-összegzés ,,serpenyőjébe'' kerülnek. A sorok fő erényei: (a) alkalmazási körük jóval tágabb ($\Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \supseteq \ell(\mathbf{N}, \mathbf{R})$); (ii) az abszolút konvergencia útján, jellemzik az összegezhető leképzéseket és nem utolsó sorban említendő az a tény is, hogy: (iii) az effektív számításokat szinte kivétel nélkül sorokon végezzük el. Ami hátránya (az **N**-re való korlátozottság) az éppen a rendezetlen-összegzés fő erénye, hisz ez utóbbit tetszőleges X halmazon értelmeztük. Az igaz, hogy a sorok elmélete is kiterjeszthető **N**-ről pl. **Z**-re vagy $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$-re, de azok már közel sem olyan ,,kerek'' elméletek, mint a $\Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R})$-é, mert legtöbbször a kiterjesztés valamilyen ad hoc leképzés segítségével végül is **N**-re tér vissza. Ebből a szempontból $\ell(X, \mathbf{R})$ jobban strukturált és ennek előnyeit hivatott példázni az alábbi $\ell(\mathbf{Z})$ elmélettöredék. Ez egyben alkalmat fog adni arra, hogy az X alaphalmaz összegezésben játszott szerepét (beleszólását) egy teljesen új és nagy távlatú megvilágításba helyezzük. Szinte megfoghatatlanul tágan fogalmazva a kérdés a következő: ha X valamely (rendezési vagy algebrai) struktúrával rendelkezik, akkor a szóban forgó adottság hogyan értékesíthető összegezéskor. Erre példaként a sor-összegzés hozható fel, hisz a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ típusú összeg az **N**-beli rendezés érvényesítéseként fogható fel. Analóg módon, az **N**-beli össze-

adás gyümölcse az ún. konvolúciós/Cauchy-féle szorzat:

Definíció.

Az $a = (a_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ és $b = (b_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatok $a * b: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ konvolúciós szorzatát az $a * b(n) = a * b_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$ képlettel értelmezzük.

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a * b_n$ közötti összefüggés nem problémamentes; íme két (ellen-)példa:

(29) (i) Az $a = b = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ $(n \in \mathbf{N})$ $\in \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, de $a * b \notin \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R})$.

(ii) Ha $a, b \in \mathbf{R}$, $a - b = 1$ és $a_n = \begin{cases} a, & n = 0, 1 \\ a^n, & n \geq 2 \end{cases}$, míg $b_n = \begin{cases} -b, & n = 0 \\ b^n, & n \geq 1 \end{cases}$, akkor $a * b_n = \begin{cases} -ab, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$, tehát $|a| > 1$ és $|b| > 1$ esetén, két divergens sor szorzata konvergens.

(*Útmutatás.* (i) $|a * b_n| = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{1}} \geq 1$.)

Az **N**-feletti konvolúciós szorzat egyik alaperedményét csak kimondjuk (a bizonyítás pl. (Cs.II)-ben, a 30-31. oldalon található).

(30) *Mertens-tétele.* Ha $a = (a_n) \in \in \ell(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N})$ $b = (b_n) \in \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $a * b \in \Sigma(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a * b_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

A feltételek aszimmetriája azt sugallja, hogy a konvolúciós szorzat természetes kerete az $\ell(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. Erről akkor győződünk meg csak igazán, ha **N**-ről **Z**-re kívánunk áttérni, mert ekkor már maga a definíció is bajba kerül: míg **N** alsó korlátossága miatt az $n = i + j$ $(i, j \in \mathbf{N})$ felbontásnak véges sok lehetősége van és így az $a * b_n = \sum_{n=i+j} a_i b_j$ bármely sorozatpárra létezik, addig **Z**-ben a felbontás lehetőségeinek száma végtelen s ezért a definíció módosításra szorul; épp ez az a momentum, amikor $\ell(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ fölénye kitűnik:

(31) Ha $a, b \in \ell(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$, akkor minden rögzített $n \in \mathbf{Z}$-re a $c_n(m) = a(m)b(n)$ képlettel értelmezett $c_n: \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ leképezés összegezhető és az $a * b_n = S_{\mathbf{Z}}(c_n)$ képlettel értelmezett $a * b: \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ függvény szintén összegezhető; ráadásul: $S_{\mathbf{Z}}(a * b) = S_{\mathbf{Z}}(a) \cdot S_{\mathbf{Z}}(b)$.

(*Bizonyítás.* A $d(m, n) = a(m)b(n)$ képlettel megadott $d: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ leképezés összegezhető, mert $|d|(m, n) = |a|(m)|b|(n)$-re alkalmazható a (15') tétel. Ekkor (22) alapján a $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} \mathbf{Z} \times \{n\}$ felbontásnak megfelelően kapjuk, hogy $S_{\mathbf{Z} \times \{n\}}(d(\cdot, n)) = b(n) S_{\mathbf{Z}}(a)$, majd pedig $S_{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}}(d) = S_{\mathbf{Z}}(b \cdot S_{\mathbf{Z}}(a)) = S_{\mathbf{Z}}(a) S_{\mathbf{Z}}(b)$.

Másrészt, legyen $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_n = \{(m, n - m) \mid m \in \mathbf{Z}\}$. Ekkor $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_n$ és $d\big|_{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_n} = c_n$. Ezért (szintén (22) alapján) c_n összegezhető s az általa értelmezett $a * b_n = S_{\mathbf{Z}}(c_n)$ szintén az, és $S_{\mathbf{Z}}(a * b) = S_{\mathbf{Z}}(S_{\mathbf{Z}}(c_n)) = S_{\mathbf{Z}}(S_{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_n}(d\big|_{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_n})) = S_{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}}(d) = S_{\mathbf{Z}}(a) S_{\mathbf{Z}}(b)$.)

A (31)-ben definiált $*: \ell(\mathbf{Z}, \mathbf{R}) \times \ell(\mathbf{Z}, \mathbf{R}) \to \ell(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$: $(a, b) \to a * b$ konvolúciós szorzat: kommutatív, asszociatív és az összeadásra nézve disztributív, tehát a (24)-beli vektortér struktúra a $*$ szorzattal együtt $\ell(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$-en egy valós-algebrát alkot. Ennek döntő jelentőségét kihangsúlyozandó, az eddigiekhez csupán még annyit teszünk hozzá, hogy az eddig vázolt elmélet maradéktalanul kiterjeszthető **R**-ről **C**-re.

Dr. Urbán János

A XXII. Kalmár László Verseny Országos Döntő feladatai és eredménye

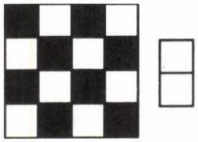
1993 június 21. és 23. között rendezte meg a *TIT* Pest megyei szervezete a Kis Matematikus Baráti Körök XXII. *Kalmár László Országos Versenyének döntőjét*. A verseny két napján a következő feladatokat tűzte ki a versenybizottság:

ÖTÖDIK OSZTÁLY (1. nap)

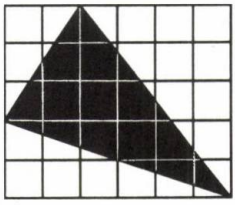
1. A két unoka életkora a nagymama életkorának két számjegyével egyenlő. Hárman együtt 72 évesek. Hány éves a nagymama?

2. Melyik az a tízes számrendszerben felírt legkisebb pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy 2-esre végződik, és ha ezt a 2-est a szám végéről áthelyezzük a szám elejére, akkor éppen a szám kétszeresét kapjuk?

3. Egy 4 × 4-es sakktábla valamelyik sötét és valamelyik világos mezőjére egy-egy bábut helyezünk. Igaz-e, hogy minden ilyen esetben letakarható a megmaradt 14 mező 7 darab 1 × 2-es dominóval?



4. A kis négyzetek területe 1. Mennyi a besatírozott háromszög területe?

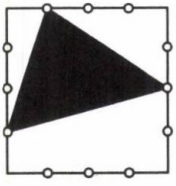


HATODIK OSZTÁLY (1. nap)

1. Melyik az a pozitív egész szám, amely a számjegyei összegével kisebb a 328-nál?

2. Januárban 3 vasárnap esett páros sorszámú napra. A hét melyik napjára esett január 20-a?

3. Hányad része a négyzet területének a háromszög területe? (A megjelölt pontok a négyzet oldalait négy-négy egyenlő részre osztják.)



4. Két padon 6-6 gyerek ült. Valamennyien különböző életkorúak (az életkorok egész számok), de az egyik padon ülő gyerekek életkorának összege és szorzata is megegyezik a másik padon ülők életkorának összegével és szorzatával. A legidősebb gyerek 16 éves. Hány évesek azok a gyerekek, akik vele egy padon ülnek?

HETEDIK OSZTÁLY (1. nap)

1. Az első 20 pozitív egész szám összegében meg lehet-e változtatni néhány szám előjelét úgy, hogy az összeg 100 legyen? És az első 18 pozitív szám összegére igaz-e a megfelelő állítás?

2. Egy háromszögről a következőket tudjuk. Az egyik szögfelezője a szemközti oldallal 78°-os szöget zár be, egy másik szögfelezővel pedig 60°-os szöget alkot. Mekkorák a háromszög szögei?

3. Két kerékpáros egymással szemben 10 órakor indult A-ból és B-ből. Mindkettő állandó sebességgel haladt. Az első egy órakor ér B-be, a másik háromnegyed kettőkor A-ba. Hány órakor találkoztak A és B között?

4. Fel lehet-e darabolni egy kockát 20 kockára? És 50 darab kockára?

5. Egy A pozitív egész szám 3-mal osztva 1 maradékot, 37-tel osztva 33 maradékot ad. Mennyi maradékot ad A, ha 111-gyel osztjuk?

NYOLCADIK OSZTÁLY (1. nap)

1. Melyik az a két szám, amelyek négyzetének különbsége 1993?

2. Egy szabályos sokszögnek 27 átlója van. Mekkorák a sokszög szögei?

3. Négy egymást követő páratlan pozitív egész szám szorzata 9-re végződik. Milyen számjegy áll a szorzatban a százasok és a tízesek helyén?

4. Adott a síkon 6 pont, ezek közül semelyik három sem esik egy egyenesbe. Ketten, A és B felváltva meghúznak egy-egy adott pontpárt összekötő, még be nem rajzolt szakaszt, A pirossal, B kékkel. Az veszít, aki először kénytelen olyan szakaszt meghúzni, hogy így a saját színével háromszög keletkezik. Lehet-e döntetlen eben a játékban? És 5 pont esetén?

5. Az $ABCD$ négyzet belsejében levő P pont távolsága három csúcstól sorra $PA = 7$, $PB = 13$ és $PC = 17$. Számítsuk ki a négyzet területét!

ÖTÖDIK OSZTÁLY (2. nap)

1. Két pozitív egész szám összege 51. Ha a nagyobbikból egy számjegyet törlünk, akkor a kisebbiket kapjuk. Melyik ez a két szám?

2. Egy iskolában 12 gyerek megbeszélte, hogy szombaton kirándulni mennek. Érdekes – jegyezte meg egyikük – a 12 gyerek átlagéletkora 11 év (minden gyerek életkorát egész évnek vesszük). Végül más elfoglaltság miatt 2 azonos életkorú tanuló nem jött el. A kiránduló gyerekek átlagéletkora így 10,6 év volt. Hány évesek voltak azok, akik nem jöttek el kirándulni?

3. Egy gyorsvonat egyik fülkéjében 7-en utaztak. Két gyerek a hosszú úton azzal szórakozott, hogy a fülkében mindenkit megkérdezett, hány embert ismer (régebbről) a vele egy fülkében utazók közül. Sorra ezeket a válaszokat kapták: 1, 3, 4, 5, 2, 4, 2 (az ismeretség kölcsönös). Rövid gondolkodás után rájöttek, valaki nem mondott igazat. Hogyan okoskodtak?

4. Hány részre bontják a síkot a négyzet oldalegyenesei? Hány részre bontják a teret a kocka lapjainak síkjai?

HATODIK OSZTÁLY (2. nap)

1. Az apa és két fia együtt 51 évesek. Az apa 6-szor annyi éves, mint a két fiú életkora számjegyeinek összege. Hány éves az apa?

2. Egy háromszög egyik szöge 20°, másik szöge 60°. Mutasd meg, hogy a 60°-os szög csúcsán áthaladó alkalmas egyenessel a háromszög két egyenlőszárú háromszögre bontható!

3. Három egymást követő páratlan számot összeszoroztunk, majd a kapott eredményt megszoroztuk 5-tel. Így a következő alakú hatjegyű számot kaptuk: $\overline{ABABAB}$, ahol A és B számjegyek. Mi volt az eredeti három páratlan szám?

4. Van-e olyan pozitív egész k szám, amelyre igaz, hogy $k + 5$, $k + 7$ és $k + 15$ egyszerre prímszámok?

HETEDIK OSZTÁLY (2. nap)

1. Mennyi lesz a következő tört nevezője, ha az összes lehetséges egyszerűsítést elvégezzük:
$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{2^{50} \cdot 3^{50}} ?$$

2. Tetszőlegesen választunk egy háromjegyű számot és ebből kiindulva képezzük a következő sorozatot: a számból kivonjuk a számjegyei összegét, az eredmény a sorozat második tagja. Ezután a második tag számjegyeit adjuk össze és az eredményt kivonjuk a második tagból, így kapjuk a sorozat harmadik tagját; és így tovább. Szerepel-e a sorozat tagjai között a 9?

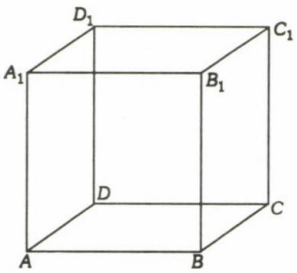
3. Egy téglalap átlójának felező merőlegese a hosszabb oldalból a rövidebb oldallal egyenlő hosszúságú szakaszt metsz le. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?

4. Hány egyenest határozhat meg a síkon 6 pont? Hány síkot határozhat meg a térben 6 pont? Mindkét kérdésnél az összes lehetséges esetet vizsgáld meg!

NYOLCADIK OSZTÁLY (2. nap)

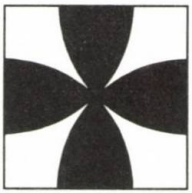
1. Kiválasztunk egy tetszőleges háromjegyű számot és négyzetre emeljük. Ezután a kiválasztott szám számjegyeit fordított sorrendbe írjuk, és a kapott számot emeljük négyzetre. A két négyzet közül a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket. Igaz-e, hogy az eredmény mindig osztható 99-cel?

2. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka belsejében egy P pont az $ABCD$ laptól 12, az ABB_1A_1 laptól 4, az ADD_1A_1 laptól 3 egység távolságra van. Milyen messze van P az A csúcstól?



3. Van-e olyan háromjegyű pozitív egész szám, amelynek minden pozitív egész kitevőjű hatványa ugyanarra a három számjegyre végződik?

4. A négyzet oldala egységnyi, a negyedkörívek középpontjai a négyzet csúcsai és áthaladnak a négyzet középpontján. Mekkora a besatírozott síkrész területe?



A versenynek a várossá alakulásának 625. évfordulóját ünneplő Nagykőrös adott otthont (ezzel kapcsolatban egy érdekesség: a 8. osztályosok 2. versenynapi 3. feladatának páratlan eredménye: 625).

A verseny végeredménye (az egyes osztályok első három helyezettje, iskolája és tanára, ill. szakkörvezetője):

ÖTÖDIK OSZTÁLY

1. *Győri Nikolett*, Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Iskola, Montágh Balázs és Kovács Csongorné;
2. *Kajtár Márton*, Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Iskola, Montágh Balázs és Kovács Csongorné;
3. *Tóth Viktória*, Nagykanizsa, Márton Tiborné;

HATODIK OSZTÁLY

1. *Végh Zoltán*, Makó, Kálvin téri Ált. Isk., Dr. Varga Istvánné;
2. *Szilágyi Attila*, Nyíregyháza, 19. sz. Ált. Isk., Dr. Kiss Sándor és Sándorfi Istvánné;
3. *Szakács László*, Budapest, Jedlik Ányos Gimnázium, Csudénus Lászlóné és Rankli Emma;

HETEDIK OSZTÁLY

1. *Zimmermann Péter*, Nagykanizsa, Hajas Jánosné és Szilajka Józsefné
2. *Lippner Gábor*, Budapest, Eötvös Gimnázium, Montágh Balázs, Gyengéné Beé Andrea, Pósa Lajos;
3. *Zubcsek Péter*, Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Iskola, Lajos Józsefné, Pósa Lajos, Montágh Balázs és Tanos Ferencné;

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. *Pálik Imre*, Nyíregyháza, 21. sz. Ált. Isk., dr. Kiss Sándor és Baksa Béláné;
2. *Papp Gyula*, Debrecen, Hatvani István Ált. Isk., Soós Gézáné;
3. *Braun Péter*, Budapest, Szent István Gimnázium, Halek Tamás.

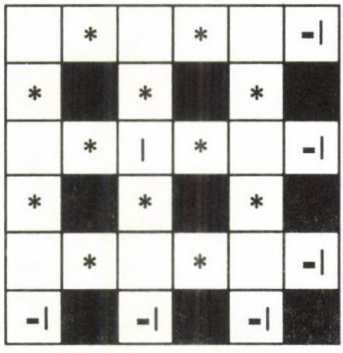
A 8. osztályosok között az 1. és 2. helyezettel azonos teljesítményt nyújtott, versenyen kívül:

Koncz Imre, Nyíregyháza, 5. sz. Ált. Isk., Dr. Kiss Sándor és Dobró Zoltánné.

Nemetz Tibor

Egy kis számtan

Népszerű rejtvénylapunk rendszeresen közöl feladványokat ezzel a címmel. A feladványok közös sémája az alábbi ábrával adható meg.



* a négy alapművelet egyike
| adott szánjegyek (0, 1, 2, ..., 9)

A nyolc üres mezőbe úgy kell számjegyeket beírni, hogy balról jobbra, továbbá felülről lefelé haladva a megadott műveleteket egymás után elvégezve az egyenlőségek teljesülnek. Jelen cikkben ehhez a feladványsorozathoz kapcsolódunk néhány megjegyzéssel.

1. A formális matematikai egyenletek rutinszerű felírása és megoldása *szárazzá* teheti a feladványt. Ha csak így lenne megoldható, akkor nem sok olvasó mutatna érdeklődést iránta.

2. Mind a nyolc üres mezőben minden számjegyet kipróbálni 10^8 próbálkozást jelentene, ami megakadályozza a „teljes kipróbálás" fejben történő elvégzését. Minimális matematikai ismereteket használó tisztán logikai meggondolásokkal ez is elkerülhető. Ez adja meg a feladvány szépségét, ezért használható fejtörőnek.

3. Napjaink matematikája állandó változásokon megy át a mindenki által hozzáférhető számítógépek elterjedésével. Így *ismétlődő, azonos típusú* feladványokat nem feltétlenül *ad – hoc* logikai meggondolásokkal kel megoldani. Az „Egy kis számtan" feladványai erre iskolapéldául szolgálhatnak.

4. A számítógépek segíthetnek egyénileg tervezett logikai feladványok sorozatgyártásában. Az, hogy ilyenek az oktató munkában eredményesen hasznosíthatók, nem szorul bizonyításra. Az „Egy kis számtan" típusú feladványok ilyen sorozatgyártásra alkalmasak.

Megjegyzéseinket egy konkrét feladvány segítségével elemezzük. Az üres mezőkbe két változóval indexelt ismeretleneket írtunk be, pusztán az egyszerűbb hivatkozás érdekében.

x_{11}	+	x_{12}	:	x_{13}	= 6
:		+		+	
x_{21}	×	8	:	x_{23}	= 6
−		−		:	
x_{31}	+	x_{32}	:	x_{33}	= 2
= 2		= 8		= 3	

1. Formális matematika

Nyolc ismeretlent kell meghatározni hat egyenlőség alapján a számjegyek halmazán, azon további feltétel mellett, hogy az x_{13}, x_{21}, x_{23}, x_{33} ismeretlenek nem lehetnek nullák. Ezek az egyenletek:

(1) $(x_{11} + x_{12}) : x_{13} = 6$
(2) $8x_{21} : x_{23} = 6$
(3) $(x_{31} + x_{32}) : x_{33} = 2$
(4) $(x_{11} : x_{21}) - x_{31} = 2$
(5) $x_{12} + 8 - x_{32} = 8$
(6) $(x_{13} + x_{23}) : x_{33} = 3$

Átrendezés után a következő új egyenletek adódnak:

(1*) $x_{11} + x_{12} = 6x_{13}$
(2*) $8x_{21} = 6x_{23}$
(3*) $x_{31} + x_{32} = 2x_{33}$
(4*) $x_{11} = (2 + x_{31})x_{21}$
(5*) $x_{12} = x_{32}$
(6*) $x_{13} + x_{23} = 3x_{33}$

Láthatjuk, hogy az x_{11}, x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{32} ismeretlenek a másik három segítségével kifejezhetők. Behelyettesítések után erre a három ismeretlenre azt kapjuk, hogy

$$8x_{12} = 10x_{21} - x_{31}(9 - x_{21})$$

Így, a jobboldalon szereplő két ismeretlent önkényesen választva a feladat megoldásait kapjuk, természetesen a ,,nem nulla'' feltételek figyelembe vételével. A formális visszahelyettesítéstől és a kötelező diszkussziótól eltekintünk, hiszen ezek nem érintik fejtegetésünk lényegét.

A két szabadon választható ismeretlen mindegyike számjegy. Ez 100 választható számpárt jelent. Ezeket akár ki is próbálhatjuk az összes megoldás kereséséhez.

2. A feladvány, mint fejtörő

Már említettük, hogy feladványunk fejben teljes kipróbálással nem oldható meg. E helyett oszthatósági és nagyságrendi meggondolások alkalmazhatók. Kövessünk végig egy ilyen gondolatsort!

A második sor első ismeretlene hárommal, a második pedig néggyel osztható. Ez utóbbi tehát csak 4 vagy 8 lehet. Ha 8 lenne, akkor az első ismeretlen 6 lenne s ezzel a bal felső mezőbe kerülő egyjegyű számnak maradék nélkül oszthatók kellene lenni hattal. Ez lehetetlen, így a második sor csak

$$3 \times 8 : 4 = 6$$

lehet. Az első sor két első üres négyzetébe kerülő két szám összege legfeljebb 18. Így a harmadik mezőbe legfeljebb 3 kerülhet. Mivel ez nem lehet nulla, így csak 1 lehet, hiszen a harmadik oszlop első két mezőjébe kerülő számok összege osztható hárommal. Ez egyúttal megadja a jobb alsó mezőbe kerülő számot is, ami csak 2 lehet.

Az első oszlopban szereplő hányados legalább 2, így a bal felső szám vagy 6, vagy 9. Egyszerű behelyettesítés kell már csak annak megállapításához, hogy a 9-nek megfelelő elrendeződés adja az egyetlen megoldást.

Matematikai formulák, sőt az ismeretlenek jelölése nélkül, pusztán logikai meggondolások segítségével egyszerűen értünk célhoz. Ez a lehetőség teremti meg a feladvány fejtörő jellegét.

3. Komputerizáljuk a feladatot

Ismétlődően előforduló feladatoknál alapvető igény, hogy azokat a feladat paramétereinek megadása után számítógép segítségével megoldhassuk. A feladványtípus alkalmas arra, hogy a tanulók ilyen programot készíthessenek. A program egy lehetséges algoritmusát mutatjuk be az alábbiakban, azzal a céllal, hogy ennek megvalósíthatóságát demonstráljuk.

A séma második sorának legfeljebb 10 számjegy pár tsz eleget. Ezeket az összes lehetőség végigpróbálásával (tehát nem egyenlet megoldással) megkereshetjük. Ennek felel meg az algoritmus első lépése.

1. lépés: Határozd meg a második sornak eleget tevő számjegy párokat (a BASIC nyelven ez pl. egy FOR – IF – NEXT utasítás sort jelent), s tárold azokat.

Ugyanez elvégezhető a második oszlop esetén is, az lesz a következő lépés.

2. lépés: Határozd meg a második oszlopnak megfelelő számjegy párokat és tárold őket!

A sorok és oszlopok középső mezőit az első két lépésben nyert számpárokkal legfeljebb 100 különböző módon tölthetjük ki. Minden ilyen kitöltés mellett a bal felső mezőbe kerülő számjegyet legfeljebb tízféleképpen adhatjuk meg. Ez ,,mindössze'' ezer lehetőséget jelent, ami bagatell egy gépnek, ha egy-egy lehetőséggel nem kell sokat foglalkozni. Esetünk-

ben azt kell mindig ellenőrizni, hogy léteznek-e az első sor és az első oszlop utolsó mezőjébe beillő számjegyek. Csak akkor kell tovább foglalkozni a szóban forgó esettel, ha ilyenek léteznek. Ez utóbbi esetben a harmadik sor és a harmadik oszlop kerül vizsgálatra. Most nem csak az a kérdés, hogy kielégíthetők-e ezek a feltételek is, hanem az, hogy egyidejűleg, tehát ugyanazzal a számjeggyel elégíthetőek-e ki. Ha igen, akkor egy megoldást kapunk. Nyilvánvaló, hogy az ezer lehetőség végigpróbálása után így az összes megoldást megkapjuk. A következő lépések ezt a gondolatsort összegzik.

3. lépés: Vedd sorra a lehetséges bal-felső elemeket, a második sort kielégítő párokat, majd a második oszlopot kielégítő párokat (FOR – FOR – FOR)! Keress az első sort és az első oszlopot kielégítő harmadik számjegyeket. Ha mindkettő teljesíthető, folytasd a 3. lépéssel, különben vedd sorra a következő lehetőséget (NEXT).

4. lépés: Keress a harmadik sort kielégítő számjegyet. Ha nincs ilyen, térj vissza a harmadik lépéshez. Ellenőrizd, hogy a nyert számok megfelelnek-e a harmadik oszlop feltételének. Ha nem, akkor térj vissza a harmadik lépéshez. Ha igen, akkor megoldást találtál, írd ki, s térj vissza a 3. lépéshez.

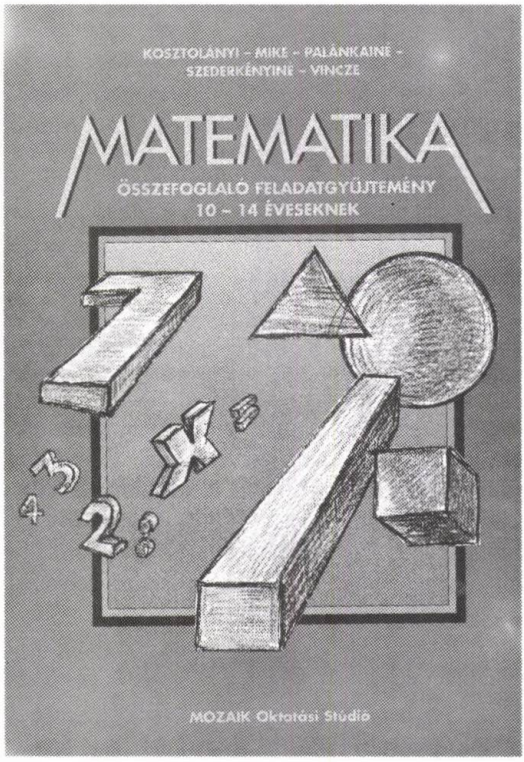
Gyártsunk fejtörőt!

Ha elkészítettük az előző részben javasolt megoldó programot, akkor sorozatban gyárthatunk egyéni fejtörőket. Az alapsémában tíz műveleti jel szerepel. Válasszuk meg ezeket véletlenszerűen (például RND utasítás segítségével). Válasszuk meg a táblázat bal felső részében elhelyezkedő négy számjegyet szintén véletlenszerűen. A kérdés az, hogy létezik-e olyan feladvány, amelynek egy megoldását írtuk így fel. Ennek az ellenőrzése igen gyors.

Az első két sor és oszlop mindegyike esetén teljes kipróbálással ellenőrizhetjük, hogy vannak-e olyan harmadik számjegyek, melyek mellett a kijelölt műveletek eredménye is számjegy. Ez mindössze legfeljebb 40 próbálkozást jelent. Ha legalább egy esetben ilyen nem létezik, akkor a felírt véletlen sémához nem készíthető feladvány. Az összes megfelelő kiegészítés mellett meg kell nézni, hogy a jobb alsó sarokba is írható-e olyan számjegy, melyre az utolsó sorok műveletei is számjegyet eredményeznek. Ha igen, kaptunk egy megoldható feladványt.

Természetesen egy jó feladványtól elvárjuk, hogy ne túl sok megoldása legyen. Ezért a nyert feladványt az előző rész programjával célszerű ellenőrizni. Ha a megoldások száma (esetleges szimmetriáktól eltekintve) nagy, keressünk új feladványt. Még a jó feladványok közül is célszerű válogatni a lehetséges megoldások esztétikája alapján.

A Mozaik Oktatási Stúdió
könyvajánlata



3100 feladat, 384 oldal, Ára: 310,- Ft
Megjelent: 1993. augusztus

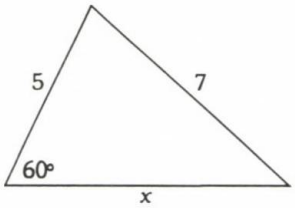
Uhrin János

Próbáljuk ki minden esetre a cosinus- és sinustételt!

A tételek levezetése előtt a tanulókkal áttekintjük a háromszögek szerkesztését az alapadatokból.

I. A cosinustétel megismerése után kiválasztjuk azt a két alapesetet, amelyre kézenfekvő a tétel alkalmazása. Ezután feltesszük a kérdést: használható-e a tétel a többi esetre is?

1. Adott két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög



A tétel „frissessége" miatt célszerű konkrét, egyszerű, számadatokkal, nevezetes szögekkel számolni.

$7^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \cos 60°$, amiből

$x^2 - 5x - 24 = 0$, a gyökök

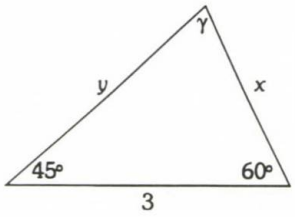
$x_1 = 8$ és $x_2 = -3$

A szóba jöhető $x_1 = 8$-cal, vagy a másik adott oldallal szemközti szög ugyancsak kiszámítható cosinustétellel, a harmadik szög pedig a háromszög szögösszegéből.

2. Adott két oldal és a kisebbikkel szemközti szög

A tételt az előbbiek szerint alkalmazzuk. A szerkesztésből ismert három esethez a számadatokat próbáljuk a tanulókkal megkerestetni. (Hasznos itt is nevezetes szöget választani.) A megoldás, egyebek között jó lehetőség a koncentrációra a másodfokú egyenletek elméletével.

3. Adott egy oldal és két szög



$x^2 = 3^2 + y^2 - 2 \cdot 3 \cdot y \cdot \cos 45°$

$3^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 75°$ $\gamma = 75°$

összeadva

$9 + x^2 = 9 + x^2 + 2y^2 -$

$- 2y(x \cos 75° + 3 \cos 45°)$, amiből

$y = x \cos 75° + 3 \cos 45°$, (1)

hasonlóan

$x = y \cos 75° + 3 \cos 60°$, (2)

és

$3 = x \cos 60° + y \cos 45°$

(Ezek az összefüggések az oldalak vetületének összegeként közvetlenül is felírhatók – amint a II. osztályban tettük.)

Az (1)-nek a (2)-be helyettesítése és rendezés után

$$x = \frac{3 \sin^2 45°}{\cos 60° + \cos 75° \cdot \cos 45°}$$

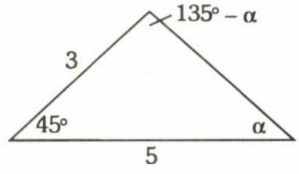
ugyanígy

$$y = \frac{3 \sin^2 60°}{\cos 45° + \cos 75° \cdot \cos 60°}$$

A nevezetes szögek szögfüggvényeit ismerik a tanulók, így ráterelődhet figyelmük a cos 75° pontos értékére. Kipróbálva, hogy cos 75° = cos(45° + 30°) ≠ cos 45° + cos 30°, későbbre hagyjuk a számítást, de ezzel megpendítettük az összegezési képletek kérdését. Most megelégedhetünk a közelítő értékkel.

II. A sinustétel segítségével szintén megoldható az általános háromszög minden esetben. Ez azonban csak az addíciós tételek után következhet.

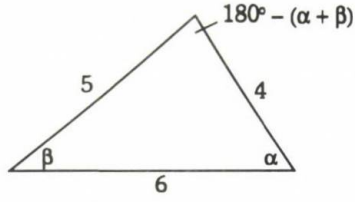
1. Adott két oldal és a közbezárt szög



$$\frac{\sin(135^\circ - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{5}{3}$$

Ezzel mesterkéltség nélkül jutunk ismét az addíciós tételek szükségességéhez, illetve trigonometrikus egyenlethez.

2. Adott három oldal



Választott adatainkkal

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{5}{4} \qquad (1)$$

és

$$\frac{\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]}{\sin\alpha} = \frac{6}{5} \qquad (2)$$

ebből

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = \frac{6}{5},$$

részletezve

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{6}{5}.$$

Mivel $\sin\alpha \neq 0$, így

$$\cos\beta + \operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\beta = \frac{6}{5} \qquad (3)$$

(1)-ből

$$\sin\alpha = \frac{5\sin\beta}{4}, \text{ tehát}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25\sin^2\beta}{16}} = \frac{\sqrt{16 - 25\sin^2\beta}}{4},$$

továbbá

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{16 - 25\sin^2\beta}}{5\sin\beta}.$$

A (3)-ba behelyettesítve

$$\cos\beta + \frac{\sqrt{16 - 25\sin^2\beta}}{5} = \frac{6}{5}, \text{ ebből}$$

$$\sqrt{16 - 25\sin^2\beta} = 6 - 5\cos\beta$$

négyzetre emelve

$$16 - 25\sin^2\beta = 36 - 60\cos\beta + 25\cos^2\beta,$$

rendezve

$$60\cos\beta = 45$$

$$\cos\beta = \frac{3}{4} \qquad \sin\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin\alpha = \frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

Ezek után a szögek meghatározhatók.

A cosinustétellel könnyen ellenőrizhető az eredmények helyessége. A két számítási mód jól mutatja, hogy mennyire lényeges a megfelelő matematikai eszköz megválasztása. Másrészt beláttuk, hogy mindkét tétellel minden alapeset megoldható, amire talán nem is mindig szoktunk rámutatni.

Versenyfelhívás a 11-14 éves korú tanulók részére az 1993/94 tanévre

A Matematika Tanítása folyóirat feladatmegoldó pontversenyt hirdet matematikából. A versenyen azok a tanulók vehetnek részt, akik 1979. december 31. után születtek.

A versenyre való jelentkezés módja: az első feladatlap megoldásával egyidejűleg a tanuló (név, osztály, szül. dátum) és az iskola (név, cím) adatait tartalmazó nevezési lap beküldésével, valamint a mellékelt csekken a 300 Ft nevezési díj befizetésével legkésőbb 1993. október 31-ig.

A folyóirat 1993. évi 4. és 5., továbbá az 1994. évi 1. és 2. számban kitűzött feladatok megoldását mindig a lap megjelenését követő hónap végéig kell beküldeni. Az összesített eredmény alapján korosztályonként a 10 legjobb versenyző meghívást kap az 1994 május folyamán Szegeden megrendezendő döntőre.

A kitűzött feladatok megoldását részletes **indoklással** kell leírni. Minden egyes feladat megoldását **külön-külön lapra** kérjük leírni és minden lapra fel kell írni a beküldő nevét, osztályát, iskoláját. A versenyzőktől elvárjuk, hogy önállóan dolgozzanak.

Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5-6. osztályosoknak)

93.1. Keressünk olyan k-jegyű számot, amelynek (balról számított) első számjegye egyenlő a számjegyei között található 0-k számával, második számjegye az 1-esek számával, harmadik számjegye a 2-esek számával, és így tovább. Oldjuk meg a feladatot $k = 4, 5, 7, 8, 9, 10$ esetén! Van-e megoldás $k = 2, 3$ esetén? És k = 6-ra?

93.2. Igaz-e, hogy bármely háromszög felbontható bármennyi (2-nél nem kevesebb) derékszögű háromszögre?

93.3. Hány részre oszthatja a síkot 5 (különböző) egyenes? És a teret 5 (különböző) sík?

93.4. Összeadjuk az összes olyan tízes számrendszerben felírt háromjegyű számot, amelynek a számjegyei különbözőek. Mennyi lesz az eredmény, és miért?

13-14 éveseknek (7-8. osztályosoknak)

93.5. Összeszorozzuk az első 100 pozitív egész számot. Mi lesz a szorzat jobbról számított 25. számjegye?

93.6. Hány 0-ra végződik a következő szám

$$7^{7^{77}} - 7^{7^7} ?$$

93.7. Egy kockát fel tudunk darabolni 8 egyforma (egybevágó) kockára, vagy 27 egyforma (egybevágó) kockára. Ha az utóbbiak közül egy ,,sarok kiskockához'' csatlakozó 8 kis kockát 1 nagyobb kockává ragasztunk össze, akkor így a kockát 20 – nem egybevágó – kockára bontottuk.

Adjunk meg minél több olyan 100-nál nem nagyobb egész számot – és hozzá módszert is – amelyre igaz, hogy ennyi kockára (nem feltétlenül egybevágóra) egy adott kocka feldarabolható!

93.8. Hány egyenest határozhat meg a síkon 6 (különböző) pont? És a térben hány síkot határozhat meg 6 (különböző) egyenes?

A megoldásokat a következő címre kérjük küldeni:

MOZAIK Oktatási Stúdió
6723 Szeged Pf. 301.

A borítékra kérjük írják rá: *Matematika feladatmegoldó pontverseny.*

KÖNYVISMERTETÉS

Scharnitzky Viktor

Beke Manó - Reif Jakab: *Érettségi vizsgálati mathematikai feladatok gyűjteménye*

1893-ban, éppen 100 évvel ezelőtt Beke Manó és Reif Jakab középiskolai tanárok több, mint 20 év matematikai érettségi feladataiból válogatva összesen 1183 feladatot tartottak érdemesnek kötetbe rendezve kiadni. Nagyon sok feladatból válogathattak, hiszen akkoriban minden középiskola évente különkülön készített el és terjesztett fel az illetékes Tankerületi Főigazgatóságokhoz több sorozat feladatot és ezek valamelyikét fogadták el és tűzték ki az írásbeli érettségi vizsgán abban az iskolában. A kitűzött feladatok színvonala természetesen nem volt egységes és a könyv összeállítói szerint: az érettségi vizsgálat színvonalát legcélszerűbben azzal emeljük, ha a hazai viszonyoknak megfelelő feladványok közül a legjobbakat a közforgalomnak átadjuk. Milyen feladatokat tartottak jónak a kötet szerzői? Érdemes véleményüket szó szerint idézni az előszóból: „A feladott problemáknak olyanoknak kell lenniök, hogy alkalma legyen a tanulóknak benne a mathematikai gondolkodás főbb elemeinek a bemutatására. A mathematikai gondolkodás főbb elemei alatt azt értjük, hogy 1. a feladott problemát pontosan átértse; 2. azt a szükséges részekre bontsa, vagyis analizálja; 3. a mellékkérdéseket sorozza a szerint, amint a főkérdés megoldására vezetnek; 4. a szükséges problemákat megoldja, megjelölve azon általános problemákat vagy tételeket, melyek alá az illető feladat sorozható és 5. a nyert eredményekből a főeredményt kellő módon összeállítsa. (Synthézis.)" E 100 év előtti követelményrendszert érdemes ma is megfontolni!

A kiválasztott feladatokat témák szerint részekre osztották.

Az egyes részek címe az érettségi vizsgán számonkért tananyagra is utal, ezek: Egyenletek. Számtani és mértani sor. Kamatos-kamat és járadékszámítás. Vegyes algebrai feladatok. Goniometria. Trigonometria. Stereometria. Elemző mértan. Vegyes geometriai feladatok. Physikai feladatok.

Az egyenletek címszó alatt első-, másod- és magasabbfokú algebrai, exponenciális, gyökös, logaritmusos, valamint szöveges egyenletek és egyenletrendszerek szerepelnek. A trigonometria című részben gömbháromszögtani feladatok is vannak. Az elemző mértan koordinátageometriát jelent és sok feladat vonatkozik az ellipszisre és hiperbolára is. A fizikai feladatok között csillagászati és földrajzi jellegűek is helyet kaptak.

Vajon érdemes-e áttanulmányozni ezeket a 100 éves feladatokat? Véleményem szerint feltétlenül!

Érdemes tájékozódni arról, hogy a 19. század utolsó harmadában matematikából mit tanultak és miből érettségiztek azok a diákok, akik a századfordulón és a 20. század elején az ország feltalálói, építői, művészei, szervezői, vállalkozói, vezetői lettek.

Tanulságos megfigyelni, hogy az akkori matematikatanárok egyáltalában mit mertek kérdezni az érettségi vizsgán.

Hasznos elolvasni, hogy a kitűzők hogyan szövegeztek meg egy-egy konkrét feladatot. A tömörség akkor erény volt, 104 oldalon elfért 1183 feladat!

Érdemes megfigyelni, hogy egy-egy feladat helyes megoldásához mennyi ismeretet kellett felhasználni más tudományágakból, például a fizikából, a csillagászatból, a földrajzból, a műszaki rajzból.

Érdemes felfigyelni arra, hogy egy-egy feladat pontos megértése már akkor is az intelligencia egyik fokmérője lehetett.

Érdekes és szórakoztató lehet az akkori és a mostani matematikai nyelv összehasonlítása. Tudta-e, hogy például a

helycserélési füzetek	=	permutáció
Carno-tétel	=	cosinustétel
téglány	=	téglalap
dűlény	=	rombusz
kerülék	=	ellipszis
a kerülék gócza	=	az ellipszis gyújtópontja
subtangens	=	az érintő vetülete
végszerű nevező	=	gyöktelenített nevező
különbségi hánylat	=	differenciálhányados
a henger bősége	=	a henger alapkörének kerülete
a chordát felező diaméter	=	a húr felezőmerőlegese.

A százéves könyv reprint kiadását Árkosi Erzsébet kezdeményezte, valamint ő írta az utószót és a magyarázatokat tartalmazó Függeléket.

Ajánlom a könyvet minden aktív és leendő tanártársamnak nemcsak azért, hogy szép, a tanításban ma is felhasználható, nem közismert feladatokban gyönyörködhessünk, hanem azért is, hogy elődeink emléke előtt tisztelghessünk.

Dr. Beke Manó – Reif Jakab: Érettségi vizsgálati mathematikai feladatok gyűjteménye, 2. (reprint) kiadás, Bp., 1993, INTEGRA-PROJEKT Kft., 116 oldal.

Bakó Zsuzsa

Harsányi Zsuzsa: *A pénz körül forog a világ*

A feladatgyűjtemény – mint címéből is kiderül – pénzügyi-közgazdasági feladatokat tartalmaz, ennek ellenére – vagy éppen ezért – használatát valamennyi középiskolában tanító kollégámnak szívből ajánlom. Így olyan feladatokkal színesíthetjük matematikaóráinkat, amelyek szóhasználatukban, adataikban, tartalmukban egyaránt a jelenlegi gazdasági körülményekhez kapcsolódnak, annak feltételeit és szabályait tükrözik. Ugyanakkor megfogalmazásuk hangulatos, kedves, szellemes, olykor szelíden ironikus. Így közelebb hozhatják a matematikát a gazdasági témák iránt érdeklődő, vállalkozónak készülő, vagy e kérdésekben másként érintett tanulókhoz, az elvont ismeretek iránt érdeklődőket pedig a mindennapi életünket átszövő, pénzzel kapcsolatos tenni- és számolnivalókhoz.

Attól sem kell félnünk, hogy mi magunk nem igazodunk el a pénzügyi szóhasználat labirintusában, a könyv elején ugyanis a szakkifejezések rövid és világos magyarázata, a fejezetek végén pedig a feladatok megoldásának rövid gondolatmenete és eredménye található. A fejezetek címéből – Minden eladó, Nagy üzletek – Kis részletek, Az idő pénz, Harc a Nagyúrral – is kiderül, hogy a szerző a feladatokat tartalmilag csoportosította, a feladatok melletti betűjelek azonban ,,megsúgják'', hogy milyen matematikai témakörhöz kapcsolódnak.

Úgy érzem, e feladatgyűjtemény hasznos és érdekes segítője lehet órai munkánknak.

Harsányi Zsuzsa: A pénz körül forog a világ; Typotex Kiadó, Budapest, 98 oldal, 160,- Ft.

Tantárgyi versenyek

Az 1993/94-es tanévre matematikából, kémiából és biológiából **feladatmegoldó pontversenyt** hirdetünk. A folyóiratok 1993. évi 4. és 5., valamint az 1994. 1. és 2. számában közöljük a feladatlapokat. Az összesített eredmény alapján a legjobban szereplő tanulók a Szegeden megrendezésre kerülő döntőbe kerülnek.

A verseny részletesebb tájékoztatóját keressék a folyóiratokban.

Tankönyvpályázat

A MOZAIK Oktatási Stúdió **pályázatot** hirdet általános és középiskolai

- tankönyvek,
- feladatgyűjtemények,
- munkafüzetek,
- oktatási segédanyagok,
- módszertani útmutatók
- egyéb tanári, valamint szülői segédletek megírására, összeállítására.

A pályamunkáknak tartalmazniuk kell:

- a szerzők személyi adatait (név, cím, munkahely, szem. szám)
- a kiadvány szerkezetére, felépítésére vonatkozó elképzelést (min. 2 oldal terjedelemben)
- egy fejezet vagy téma teljeskörű feldolgozását
- a kiadvány tartalomjegyzékét.

Az elfogadott pályaműveket a kiadó megjelenteti, az alkotók szerzői jogdíjban részesülnek.

Leadási határidő:
II. szakasz: 1993. december 31.

A szövegszerkesztővel vagy géppel írt pályázatokat a következő címre kérjük beküldeni:

MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.

Bővebb információval a (62) 312-988-as telefonszámon Tóth Mónika áll rendelkezésükre.

Hungarodidact '93

1993. október 26-29 között a **Hungarodidact '93** Nemzetközi Oktatási, Oktatástechnikai és Képzési szakvásáron a BNV D pavilonjában a 201.7-es standon megtalálhatják a MOZAIK Oktatási Stúdió teljes kínálatát.

imosoft

MOZAIK

A matematika TANÍTÁSA

93. NOVEMBER ára: 86,- Ft I. évf. / 5. szám

TARTALOM

AZ AMERIKAI MATEMATIKAI VERSENYVIZSGÁKRÓL II. RÉSZ
Dr. Kántor Sándorné
egyetemi adjunktus, KLTE, Debrecen

KÉT ÉRDEKES MAXIMUM-FELADAT
Fitos László, nyug. főiskolai tanár, Esztergom

EGY ÚJSZERŰ VETÉLKEDŐ VÁCOTT
Újvári István, tanár, Vác

MEGYEI KÖZÉPISKOLÁS MATEMATIKA-VERSENY GYŐRÖTT
Dr. Csorba Ferenc - Náfrádi Ferenc, tanárok, Győr

A RÁCZ LÁSZLÓ VÁNDORGYŰLÉSRŐL
Scharnitzky Viktor, főiskolai docens, Budapest

MAT-KAPOCS TÁJÉKOZTATÓ
Vancsó Ödön, tanársegéd, ELTE, Budapest

SZOKATLAN BESZÁMOLÓ EGY MATEMATIKAI TÁBORRÓL
Dienes Péter, tanuló, Radnóti Gimnázium, Szeged

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONT-VERSENY II. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

KÖNYVISMERTETÉS
Hajnal Imre

Két, az érdeklődést felkeltő, meglepő eredményű maximum-feladattal fogunk foglalkozni, amelyek többféle, elvileg különböző módszerrel is megoldhatók, majd pedig általánosítjuk őket. A többféle megoldási módszer keresése és az általánosítás is nagyon alkalmas tanítványaink ... *(13. oldal)*

Minden iskolában jelen vannak a tehetséges gyerekek, de nem mindegyik tehetséget ismerik fel időben a pedagógusok. Ennek okai sokfélék. Ott van közöttük az is, hogy a különböző tehetségfajták más és más életkorban jelentkeznek. Így a matematikai tehetség igen korán, ... *(18. oldal)*

Szokatlan és érdekes. Ezt válaszoltam szüleimnek, amikor megkérdezték, hogy milyen volt a matektábor Szegeden. Szokatlan és érdekes. Hogy miért szokatlan? Már jártam egypár matektáborban, s ott többnyire feladatokat oldottunk meg. Itt szervezett keretek között ... *(26. oldal)*

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Olvasószerkesztő: Földvári Erika
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 430 Ft
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Hirdetésekkel kapcsolatos felvilágosítás: Tóth Mónika
Tel.: (62) 312-988

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

AZ AMERIKAI MATEMATIKAI VERSENYVIZSGÁKRÓL II. RÉSZ
Dr. Kántor Sándorné
egyetemi adjunktus, KLTE, Debrecen

KÉT ÉRDEKES MAXIMUM-FELADAT
Fitos László, nyug. főiskolai tanár, Esztergom

EGY ÚJSZERŰ VETÉLKEDŐ VÁCOTT
Újvári István, tanár, Vác

MEGYEI KÖZÉPISKOLÁS MATEMATIKA-VERSENY GYŐRÖTT
Dr. Csorba Ferenc - Náfrádi Ferenc, tanárok, Győr

A RÁTZ LÁSZLÓ VÁNDORGYŰLÉSRŐL
Scharnitzky Viktor, főiskolai docens, Budapest

MAT-KAPOCS TÁJÉKOZTATÓ
Vancsó Ödön, tanársegéd, ELTE, Budapest

SZOKATLAN BESZÁMOLÓ EGY MATEMATIKAI TÁBORRÓL
Dienes Péter, tanuló, Radnóti Gimnázium, Szeged

A MATEMATIKA FELADATMEGOLDÓ PONT-VERSENY II. FORDULÓJÁNAK FELADATAI

KÖNYVISMERTETÉS
Hajnal Imre

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 10-12 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli citálások név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat.

Dr. Kántor Sándorné

Az amerikai matematikai versenyvizsgákról
II. rész

Az 1991. évi AHSME feladatai

1. Ha bármely különböző a, b és c értékére

$$\boxed{a, b, c} = \frac{c+a}{c-b}, \text{ akkor } \boxed{1, -2, -3} =$$

(A) -2 (B) $-\frac{2}{5}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) 2.

2. $|3 - \pi| =$

(A) $\frac{1}{7}$ (B) 0,14 (C) $3 - \pi$ (D) $3 + \pi$ (E) $\pi - 3$.

3. $(4^{-1} - 3^{-1})^{-1} =$

(A) -12 (B) -1 (C) $\frac{1}{12}$ (D) 1 (E) 12.

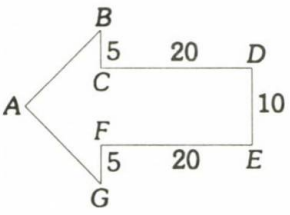
4. Az alábbi háromszögek közül melyik nem létezhet?

(A) Tompaszögű és egyenlőszárú háromszög.
(B) Egyenlőszárú és derékszögű háromszög.
(C) Tompaszögű és derékszögű háromszög.
(D) Különböző oldalú és derékszögű háromszög.
(E) Különböző oldalú és tompaszögű háromszög.

5. Egy nyíl alakú poligonban (lásd az ábrát) az A, F, C, D és E csúcsoknál derékszög van, $BC = FG = 5$, $CD = FE = 20$, $DE = 10$ és $AB = AG$.

A poligon területét legjobban közelíti

(A) 288 (B) 291 (C) 294
(D) 297 (E) 300.



6. Ha $x \geq 0$, akkor $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} =$

(A) $x\sqrt{x}$ (B) $x\sqrt[4]{x}$ (C) $\sqrt[8]{x}$ (D) $\sqrt[8]{x^3}$ (E) $\sqrt[8]{x^7}$.

7. Ha $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$ és $b \neq 0$, akkor $\frac{a+b}{a-b} =$

(A) $\frac{x}{x+1}$ (B) $\frac{x+1}{x-1}$ (C) 1 (D) $x - \frac{1}{x}$ (E) $x + \frac{1}{x}$.

8. Egy x folyadék nem oldódik a vízben. Ha nem kavargatjuk, akkor a folyadék a víz felszínén 0,1 cm vastagon köralakban terül szét. Egy téglatest alakú edényt, aminek mérete 6 cm × 3 cm × 12 cm, megtöltünk x-szel. Ezután az edényben lévő folyadékot átöntjük egy nagy alapterületű, vizet tartalmazó tartályba. A vízen szétterülő kör alakú folyadékréteg sugara centiméterben

(A) $\frac{\sqrt{216}}{\pi}$ (B) $\sqrt{\frac{216}{\pi}}$ (C) $\sqrt{\frac{2160}{\pi}}$ (D) $\frac{216}{\pi}$ (E) $\frac{2160}{\pi}$.

9. A $t = 0$ időponttól a $t = 1$ időpontig egy népesség i %-kal növekedett, $t = 1$-től $t = 2$-ig pedig j %-kal.
Ekkor t = 0-tól t = 2-ig a növekedés

(A) $(i + j)$ % (B) $i \cdot j$ % (C) $(i + i \cdot j)$ % (D) $(i + j + \frac{i \cdot j}{100})$ %

(E) $(i + j + \frac{i+j}{100})$ %.

10. Egy P pont 9 egységnyire van egy 15 egységnyi sugarú kör középpontjától. Hány P-n áthaladó egész hosszúságú húrja van a körnek?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 29.

11. Péter és Pál 10 km-t futnak. Egy helyről indulnak, 5 km-t hegynek felfelé futnak, a hegycsúcsig, majd ugyanazon az útvonalon visszatérnek. Péter 10 perccel korábban indul és 15 km/h sebességgel fut hegynek felfelé, 20 km/h-val pedig lefelé. Pál 16 km/h-val fut felfelé és 22 km/h-val lefelé. A csúcstól milyen messze találkoznak szembefutva egymással?

(A) $\frac{5}{4}$ km (B) $\frac{35}{27}$ km (C) $\frac{27}{20}$ km (D) $\frac{7}{3}$ km (E) $\frac{28}{9}$ km.

12. Egy konvex hatszög belső szögei egész számokból álló számtani sorozatot alkotnak. Legyen $m°$ a hatszög legnagyobb szöge.
Ekkor $m°$ lehetséges legnagyobb értéke

(A) 165 ° (B) 167 ° (C) 170 ° (D) 175 ° (E) 179 °.

13. Egy versenyen három ló: X, Y és Z indul, döntetlen eredmény nem fordulhat elő. Akkor mondjuk, hogy egy ló $p : q$ arányban nyer, ha annak valószínűsége, hogy a ló megnyeri a versenyt $\frac{q}{p+q}$.

Ha X ló 3 : 1 arányban nem nyer és Y ló 2 : 3 arányban nem nyer, akkor annak az esélye, hogy Z ló nyer

(A) 3 : 20 (B) 5 : 6 (C) 8 : 5 (D) 17 : 3 (E) 20 : 3.

15. Egy kör alakú asztal körül 60 szék van, és ezeken N számú személy ül. Ha egy újabb személy ül még az asztalhoz, akkor az biztosan valaki közvetlen szomszédja lesz. Ekkor N legkisebb értéke

(A) 15 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 58.

16. Egy matematikai teszt megírásában egy középiskola 100 tanulója vett részt, és az átlagpontszámuk 100. Az alsóévesek száma 50 %-kal több, mint a felsőéveseké, a felsőévesek átlagpontszáma pedig 50 %-kal magasabb, mint az alsóéveseké. A felsőévesek átlagpontszáma

(A) 100 (B) 112,5 (C) 120 (D) 125 (E) 150.

17. Akkor mondjuk, hogy egy pozitív egész N szám palindróm, ha számjegyeit fordított sorrendben leírva ismét e számhoz jutunk. Ebben az évszázadban az 1991-es év az egyetlen, amelyre teljesül, hogy

a) palindróm

b) egy kétjegyű és egy háromjegyű prím palindróm szorzata.

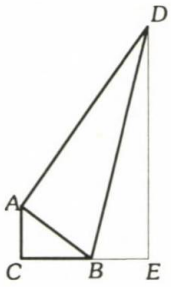
Hány évszámra teljesül az *a)* és *b)* tulajdonság 1000 és 2000 között (beleértve 1991-et is)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

18. Ha S az olyan Z pontok halmaza a komplex síkon, amelyekre $(3 + 4i)Z$ valós, akkor S

(A) derékszögű háromszög (B) kör (C) hiperbola (D) egyenes
(E) parabola.

19. Az ABC háromszögnek a C-nél levő szöge derékszög, $AC = 3$ és $BC = 4$. Az ABD háromszögnek derékszöge van A-nál, és $AD = 12$. A C és D pontok az AB egyenes ellenkező oldalán vannak. A D-n átmenő, $\overline{AC}$-vel párhuzamos egyenes $\overline{CB}$-t E-ben metszi.



Ha $\frac{DE}{DB} = \frac{m}{n}$, ahol m és n relatív prím egészek, akkor $m + n =$

(A) 25 (B) 128 (C) 153 (D) 243 (E) 256.

20. Az összes olyan valós x érték összege, amelyre

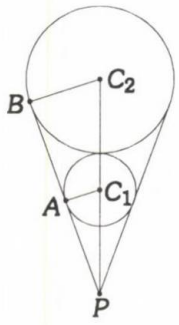
$$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$$

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3 (E) $\frac{7}{2}$.

21. Ha $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ minden $x \neq 0$, $x \neq 1$ esetén, és $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, akkor $f\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right) =$

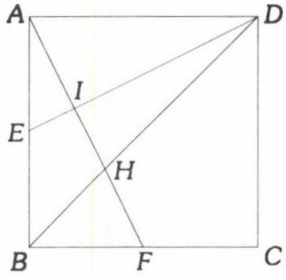
(A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\mathrm{tg}^2\theta$ (D) $\mathrm{ctg}^2\theta$ (E) $\frac{1}{\sin^2\theta}$.

22. Két kör kívülről érinti egymást. A $\overline{PAB}$ és a $\overline{PA'B'}$ egyenesek a körök közös külső érintői, az A és A' ill. a B és B' érintési pontokkal a kisebb ill. a nagyobb körön. Ha $PA = AB = 4$, akkor a kisebbik kör területe



(A) $1{,}44\pi$ (B) 2π (C) $2{,}56\pi$
(D) $\sqrt{8}\,\pi$ (E) 4π.

23. Ha $ABCD$ egy 2x2-es négyzet, E az AB szakasznak, F a BC szakasznak a felezőpontja, $\overline{AF}$ és $\overline{DE}$ egyenesek I-ben, $\overline{BD}$ és $\overline{AF}$ egyenesek pedig H-ban metszik egymást, akkor a $BEIH$ négyszög területe



(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{7}{15}$
(D) $\frac{8}{15}$ (E) $\frac{3}{5}$.

24. Az $y = \lg x$ függvény grafikonját, G-t 90°-kal elforgatjuk az origó körül az óramutató járásával ellentétes irányban.
Az így kapott G' grafikon egyenlete:

(A) $y = \lg\left(\frac{x+90}{9}\right)$ (B) $y = \log_x 10$ (C) $y = \frac{1}{x+1}$ (D) $y = 10^{-x}$
(E) $y = 10^x$.

25. Ha $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ és

$$P_n = \frac{T_2}{T_2 - 1} \cdot \frac{T_3}{T_3 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{T_n}{T_n - 1} \qquad (n = 2,3,\ldots),$$

akkor P_{1991}-hez legközelebb van

(A) 2,0 (B) 2,3 (C) 2,6 (D) 2,9 (E) 3,2.

26. Egy n számjegyű pozitív egész számot cselesnek hívunk, ha jegyeinek sorozata az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja, és az első k számjegyéből alkotott szám osztható k-val, ha $k = 1, 2, \ldots, n$. Például 321 háromjegyű cseles szám, mert 1 osztja 3-at, 2 osztja 32-t, 3 osztja 321-et. Hány hatjegyű cseles szám van?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.

27. Ha $x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 20$, akkor

$$x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} =$$

(A) 5,05 (B) 20 (C) 51,005 (D) 61,25 (E) 400.

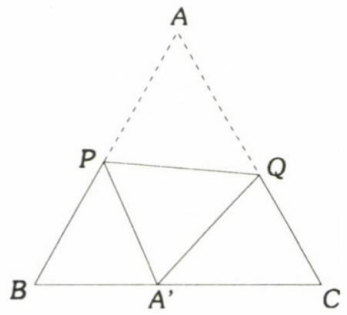
28. Egy urna kezdetben 100 fekete és 100 fehér golyót tartalmaz. Egymás után hármasával kiveszünk golyókat és visszateszünk néhányat a következő szabály szerint:

Kivéve	Betéve
3 fekete	1 fekete
2 fekete, 1 fehér	1 fekete, 1 fehér
1 fekete, 2 fehér	2 fehér
3 fehér	1 fekete, 1 fehér

Véges számú lépés után az urna tartalma az alábbiak közül melyik lehet?

(A) 2 fekete (B) 2 fehér (C) 1 fekete (D) 1 fekete és 1 fehér
(E) 1 fehér.

29. Az ABC szabályos háromszöget a PQ él mentén összehajtjuk úgy, hogy A a BC szakaszra kerül (ábra). Ha $BA' = 1$ és $A'C = 2$, akkor $PQ =$



(A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{7}{20}\sqrt{21}$ (C) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(D) $\frac{13}{8}$ (E) $\sqrt{3}$.

30. Jelölje $|S|$ az S halmaz elemeinek a számát és $n(S)$ az S részhalmazainak (az üres halmazt és S-et beleértve) a számát. Ha A, B és C olyan halmazok, hogy $n(A) + n(B) + n(C) = n(A \cup B \cup C)$ és $|A| = |B| = 100$, akkor $|A \cup B \cup C|$ minimális értéke

(A) 96 (B) 97 (C) 98 (D) 99 (E) 100.

A megoldási kulcs:

E-E-A-C-E-E-B-C-D-B-B-D-D-C-B-D-D-D-B-E-A-B-C-D-D-D-C-B-B-B

Megjegyzések:

1. A 13. feladat szövege tetszett a versenyzőknek.

2. A 17. feladat kihasználta az 1991 speciális tulajdonságait, ti. azt, hogy az 1991 palindrom szám.

3. A 22. feladat érdekessége az, hogy a feladat abban a változatban is kitűzhető, ha a kör területét a kör kerületére cseréljük ki a szövegben és a válaszok közül a D adja ennek az eredményét.

Az 1992. évi AHSME feladatai

1. $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 =$

(A) 6^6 (B) 6^7 (C) 36^6 (D) 6^{36} (E) 36^{36}.

2. Ha $3(4x + 5\pi) = P$, akkor $6(8x + 10\pi) =$

(A) $2P$ (B) $4P$ (C) $6P$ (D) $8P$ (E) $18P$.

3. Egy urnában pénzérmék és golyók vannak, amelyek ezüstből vagy aranyból készültek. Az urnában lévő dolgok húsz százaléka golyó. Az urnában lévő pénzérmék negyven százaléka ezüst. Az urnában lévő dolgok hány százaléka arany pénzérme?

(A) 40 % (B) 48 % (C) 52 % (D) 60 % (E) 80 %.

4. Ha $m > 0$, és az $(m; 3)$, illetve $(1; m)$ koordinátájú pontok az m meredekségű egyenesen fekszenek, akkor $m =$

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 (E) $\sqrt{5}$.

5. Ha a, b, c pozitív egész számok, továbbá a és b páratlan, akkor $3^a + (b-1)^2 c$

(A) páratlan szám c tetszőleges értéke esetén.
(B) páros szám c tetszőleges értéke esetén.
(C) páratlan, ha c páros; páros, ha c páratlan.
(D) páratlan, ha c páratlan; páros, ha c páros.
(E) páratlan, ha c 3-nak nem többszöröse; páros, ha 3-nak többszöröse.

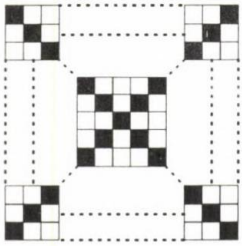
6. Ha $x > y > 0$, akkor $\dfrac{x^y y^x}{y^y x^x} =$

(A) $(x-y)^{\frac{y}{x}}$ (B) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x-y}$ (C) 1 (D) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{y-x}$ (E) $(x-y)^{\frac{x}{y}}$.

7. w úgy aránylik x-hez, mint 4 : 3, y a z-hez, mint 3 : 2, és z az x-hez, mint 1 : 6. Hogyan aránylik ekkor w az y-hoz?

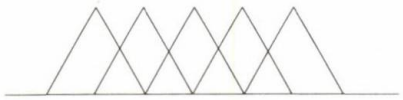
(A) 1 : 3 (B) 16 : 3 (C) 20 : 3 (D) 27 : 4 (E) 12 : 1.

8. A négyzet alapú szoba padlója egybevágó négyzet alakú csempékkel van lefedve. A padló átlói mentén fekete csempék vannak, a többi csempe fehér. Ha 101 darab fekete csempe van, akkor a padlón összesen mennyi csempe van?



(A) 121 (B) 625 (C) 676
(D) 2500 (E) 2601.

9. 5 darab $2\sqrt{3}$ oldalhosszúságú szabályos háromszög úgy van elhelyezve egy egyenes egyik oldalán, hogy mindegyiknek az egyik oldala az egyenesre illeszkedik. Az egyenesen fekvő oldalak felezőpontjai csúcsai lesznek egy-egy másik háromszögnek. Mekkora területű részt fed le az 5 háromszög együttvéve?

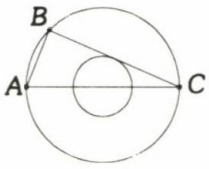


(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) $10\sqrt{3}$ (E) $12\sqrt{3}$.

10. Mennyi azon k pozitív egészek száma, amelyekre a $kx - 12 = 3k$ egyenletnek x-re nézve van egész szám megoldása?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7.

11. Két koncentrikus kör sugarának aránya 1 : 3. Ha $\overline{AC}$ a nagyobb kör átmérője, és $\overline{BC}$ a nagyobb körnek olyan húrja, amely érinti a kisebb kört, és $AB = 12$, akkor a nagyobb kör sugara éppen



(A) 13 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26.

12. Az $x - 3y + 11 = 0$ egyenest az x-tengelyre tükrözve, az $y = mx + b$ egyeneshez jutunk. Mennyi $m + b$ értéke?

(A) −6 (B) −5 (C) −4 (D) −3 (E) −2.

13. Hány darab pozitív egészekből álló $(a; b)$ számpár elégíti ki az

$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13$$

egyenletet az $a + b \leqq 100$ feltétel mellett?

(A) 1 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 13.

14. A következő egyenletek közül melyeknek ugyanaz a gráfja?

I. $y = x - 2$ II. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ III. $(x + 2)y = x^2 - 4$

(A) Csak I-nek és II-nek.
(B) Csak I-nek és III-nak.
(C) Csak II-nek és III-nak.
(D) I-nek, II-nek és III-nak.
(E) Az egyenleteknek különböző gráfjuk van.

15. Legyen $i = \sqrt{-1}$. A $z_1 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + i$, $n \geq 1$ rekurzió egy komplex számsorozatot ad meg. Milyen messze van z_{111} az origótól a komplex számsíkon?

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{110}$ (E) $\sqrt{2^{55}}$.

16. Ha $\dfrac{y}{x-z} = \dfrac{x+y}{z} = \dfrac{x}{y}$ teljesül 3 egymástól páronként különböző pozitív x, y és z esetén, akkor mennyi $\dfrac{x}{y}$?

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{5}{3}$ (E) 2.

17. Az összes 19-től 92-ig terjedő egész számot egymás után írjuk, így kapunk egy újabb egész számot:

$N = 19202122...909192.$

Ha 3^k a legnagyobb hatványa 3-nak, amely osztja N-et, akkor $k =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) több mint 3.

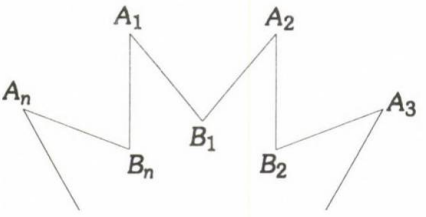
18. Pozitív egész számok $a_1, a_2, \ldots$ növekvő sorozata olyan tulajdonságú, hogy $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ teljesül minden $n \geq 1$ esetén. Ha $a_7 = 120$, akkor mennyi a_8?

(A) 128 (B) 168 (C) 193 (D) 194 (E) 210.

19. Egy kocka mindegyik csúcsánál tekintsük azt a tetraédert, amelyet a csúcs és a csúcsban összefutó élek felezőpontjai határoznak meg. E nyolc tetraéder eltávolítása után a kockából megmaradó testet kubooktaédernek nevezzük. A kubooktaéder és az eredeti kocka térfogatának aránya mely értékhez áll legközelebb?

(A) 0,75 (B) 0,78 (C) 0,81 (D) 0,84 (E) 0,87.

20. Egy „n-csúcsú szabályos csillag", látható az ábrán. Ez egy egyszerű zárt töröttvonalból áll, melynek mind a $2n$ éle egyenlő hosszúságú, az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ szögek is egybevágóak, és a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ szögek is egybevágóak. Ha az A_1-nél lévő hegyesszög 10°-al kisebb, mint a B_1-nél lévő hegyesszög, akkor mennyi n?



(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36 (E) 60.

21. Egy véges $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ számsorozat esetén A Cesáro összegét

$$\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$$

adja meg, ahol $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ $(1 \leq k \leq n)$. Ha a 99 tagú $(a_1, a_2, \ldots, a_{99})$ sorozat Cesáro összege 1000, akkor mennyi a 100 tagú $(1, a_1, a_2, \ldots, a_{99})$ sorozat Cesáro összege?

(A) 991 (B) 999 (C) 1000 (D) 1001 (E) 1009.

22. Tíz pont van kijelölve a pozitív X^+ tengelyen, és öt pont a pozitív Y^+ tengelyen. Berajzoljuk az X^+-on kijelölt 10 pontot az Y^+-on kijelölt 5 ponttal összekötő 50 darab szakaszt. Mennyi lesz ezen ötven szakasz metszéspontjainak maximálisan lehetséges száma?

(A) 250 (B) 450 (C) 500 (D) 1250 (E) 2500.

23. Mekkora az $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ halmaz azon legnagyobb számosságú S részhalmazának a számossága, amelyre S semelyik két különböző elemének összege sem osztható 7-tel?

(A) 6 (B) 7 (C) 14 (D) 22 (E) 23.

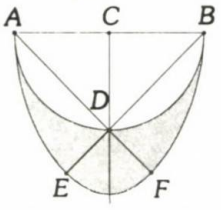
24. A 10 egység területű $ABCD$ paralelogramma oldalaira $AB = 3$, $BC = 5$ teljesül. Vegyük fel az E, F, G pontokat az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ill. $\overline{AD}$ oldalakon úgy, hogy $AE = BF = AG = 2$ teljesüljön. A G-n átmenő $\overline{EF}$-fel párhuzamos egyenes $\overline{CD}$-t H-ban metszi. Mekkora az $EFHG$ négyszög területe?

(A) 4 (B) 4,5 (C) 5 (D) 5,5 (E) 6.

25. Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle = 120°$, $AB = 3$ és $BC = 4$. Ha AB-re A-ban emelt merőleges és a BC-re C-ben emelt merőleges D-ben metszi egymást, akkor $CD =$

(A) 3 (B) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ (C) 5 (D) $\frac{11}{3}$ (E) $\frac{10}{\sqrt{3}}$.

26. Az $\overset{\frown}{AB}$ félkör középpontja C, sugara 1 egység. A D pont az $\overset{\frown}{AB}$ íven van és $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Hosszabbítsuk meg $\overline{BD}$-t E-ig, illetve $\overline{AD}$-t F-ig úgy, hogy az $\overset{\frown}{AE}$ körív középpontja B, illetve a BF körív középpontja A legyen. Az $\overset{\frown}{EF}$ körív középpontja D. Mekkora a satírozott $AEFBDA$ „mosoly" területe?



(A) $(2-\sqrt{2})\pi$ (B) $2\pi - \pi\sqrt{2} - 1$ (C) $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$ (D) $\frac{5\pi}{2} - \pi\sqrt{2} - 1$

(E) $(3-2\sqrt{2})\pi$.

27. Az r sugarú kör AB húrja 10 egység, a CD húré 7 egység. $\overline{AB}$-t és $\overline{CD}$-t B-n, illetve C-n túl meghosszabbítva P-ben metszik egymást a körön kívül. Ha $APD\sphericalangle = 60°$ és $PB = 8$, mennyi lesz r^2?

(A) 70 (B) 71 (C) 72 (D) 73 (E) 74.

28. Legyen $i = \sqrt{-1}$. Mennyi a $z^2 - z = 5 - 5i$ egyenlet gyökei valós részének a szorzata?

(A) −25 (B) −6 (C) −5 (D) $\frac{1}{4}$ (E) 25.

29. Egy hamis pénzérme $\frac{2}{3}$ valószínűséggel esik fejre. Ha a pénzérmét 50-szer dobjuk fel, mennyi a valószínűsége annak, hogy a fejek száma páros szám?

(A) $25\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ (B) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{50}}\right)$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^{50}}\right)$ (E) $\frac{2}{3}$.

30. Az egyenlő szárú trapéz alapjai $AB = 92$ és $CD = 19$. Tegyük fel, hogy $AD = BC = x$, és hogy az a kör, amelynek középpontja $\overline{AB}$-n van, érinti az $\overline{AD}$ és $\overline{BC}$ szakaszt. Ha m jelöli x legkisebb lehetséges értékét, akkor mennyi m^2?

(A) 1369 (B) 1679 (C) 1748 (D) 2109 (E) 8825.

A megoldási kulcs:

B-B-B-C-A-D-B-E-E-D-B-C-C-E-B-E-B-D-D-D-A-B-E-C-E-B-D-B-D-B

Megjegyzés:

1. A 16. feladat megoldása nagyon egyszerűvé válik, ha a tanuló ismeri a következő segéd feladatot:
   Ha $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{j}=k$, akkor $\frac{a+c+e}{b+d+j}=k$.

2. Más országok törzsanyaga tartalmazza a komplex számokat, így a versenyző tanulókat célszerű velük megismertetni, lásd pl. a 15. és a 28. feladatot.

3. A valószínűségszámítás témaköre is beletartozik a mindenki által ismert anyagba, ezért nálunk is nagyobb figyelmet kellene neki szentelni.

   A kombinatorikai ismeretek felhasználásával egyszerűen lehet megoldani a 29. feladatot.

   Legyen p annak a valószínűsége, hogy a fejek száma páros, illetve q annak a valószínűsége, hogy a fejek száma páratlan.

   Ekkor

$$p=\binom{50}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{50}+\binom{50}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{48}+\ldots+\binom{50}{50}\left(\frac{2}{3}\right)^{50}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0,$$

$$q=\binom{50}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{49}+\binom{50}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{47}+\ldots+\binom{50}{49}\left(\frac{2}{3}\right)^{49}\cdot\left(\frac{1}{3}\right),$$

amiből $p-q=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^{50}=\frac{1}{3^{50}}$, de $p+q=1$ miatt következik, hogy $p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^{50}}\right)$.

Hajnal Imre

Középiskolások kézikönyve sorozat

Matematikai fogalmak, tételek

A könyvben összefoglalva és rendszerezve található a középiskolai matematika elméleti tananyaga. Ezzel segítséget nyújt az érettségi vizsgára, főiskolai, egyetemi tanulmányokra készülőknek.

Ajánljuk ezt a könyvet mindazoknak, akik a matematikai fogalmak, definíciók, állítások, tételek közötti logikai rend alapos ismeretére és jól alkalmazható szilárd tudásra törekednek, olyanra, amely biztosíthatja a jó eredményű érettségi vagy a sikeres felvételi vizsgájukat.

3. kiadás ára: 331,- Ft

Fitos László

Két érdekes maximum-feladat

Két, az érdeklődést felkeltő, meglepő eredményű maximum-feladattal fogunk foglalkozni, amelyek többféle, elvileg különböző módszerrel is megoldhatók, majd pedig általánosítjuk őket. A többféle megoldási módszer keresése és az általánosítás is nagyon alkalmas tanítványaink logikus gondolkodásának és matematikai problémamegoldó készségének a fejlesztésére.

I. 1. feladat. Írjunk az $y = x^2$ egyenletű parabolába egy tetszőleges ABC háromszöget és rögzítsük annak két szélső csúcsát: A-t és C-t! Hol kell felvenni a parabolán a közbülső B csúcsot, hogy az ABC háromszög területe maximális legyen?

1. megoldás. Ha a beírt háromszög A, B, C csúcsának az abszcisszáját rendre a-, b-, c-vel jelöljük ($a < b < c$), akkor az ABC háromszög területe (lásd az 1. ábrát):

$$t_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b-a & b^2-a^2 & 0 \\ c-a & c^2-a^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)(c-a)(c-b)$$

Mivel a feladat szerint csak b számértéke változik, a és c állandó, ezért a terület a b változó függvénye. Tehát a kapott területfüggvény:

$$f(b) = \frac{1}{2}(c-a)(b-a)(c-b) = k(b-a)(c-b), \quad (1)$$

amelyben k konstans és $a < b < c$ miatt $b - a$ és $c - b$ pozitív. Akkor $b - a$ és $c - b$ mértani és számtani közepe között fennálló egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt{(b-a)(c-b)} \leqq \frac{(b-a)+(c-b)}{2} =$$

$$= \frac{c-a}{2} = \text{konstans}$$

Ezért $(b - a)(c - b)$ akkor maximális, ha az egyenlőségjel érvényes, vagyis ha

$$b - a = c - b, \quad \text{amiből} \quad b = \frac{a+c}{2}$$

Tehát a beírt háromszög területe akkor maximális, ha a B csúcs abszcisszája az A és C csúcs abszcisszájának számtani közepe, azaz ha a, b, c egy számtani sorozat egymást követő tagjai.

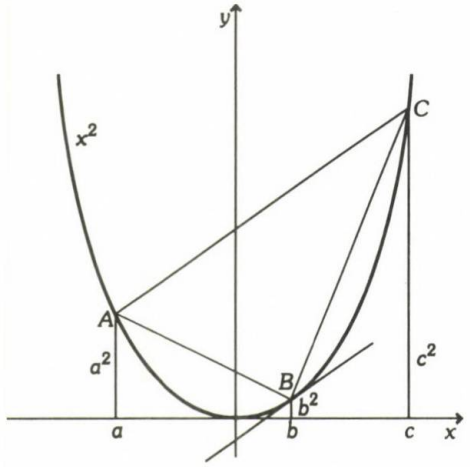
2. megoldás. Mivel az (1) alatti $f(b) = k(b - a)(c - b)$, területfüggvény b-ben másodfokú, továbbá a zérushelyei: $b_1 = a$ és $b_2 = c$, ezért a maximum helye a két zérushely, a és c számtani közepe, azaz $b = \frac{a+c}{2}$.

3. megoldás. A beírt ABC háromszög területe akkor maximális, ha a változó B csúcs a rögzített AC oldaltól a lehető legtávolabb van (1. ábra). Ez a feltétel akkor teljesül, ha a B csúcs az AC oldallal párhuzamos parabolaérintő érintési pontja, azaz ha a B-beli érintő iránytangense egyenlő az AC húr iránytangensével. A B csúcsban meghúzott érintő iránytangense az $y = x^2$ függvény deriváltja az $x = b$ helyen, ami $2b$-vel egyenlő. Az AC húr iránytangense pedig

$$m_{AC} = \frac{c^2 - a^2}{c - a} = c + a$$

Tehát a két iránytangens egyenlőségéből:

$$b = \frac{a+c}{2}.$$



1. ábra

4. megoldás. Az (1) alatti területfüggvényt b szerint deriválva kapjuk: $f'(b) = k(c - 2b + a)$, és ez akkor nulla, ha $c - 2b + a = 0$, tehát

$$b = \frac{a+c}{2}.$$

5. megoldás. A 3. megoldásban láttuk, hogy a keresett B csúcs az AC húrral párhuzamos érintő érintési pontja. De akkor felhasználhatjuk azt a minden parabolára érvényes tételt, hogy bármelyik érintő érintési pontja és a vele párhuzamos húrok felezőpontjai egy olyan egyenesre illeszkednek, amely párhuzamos a parabola tengelyével. Ezt alkalmazva a mi feladatunkra, kapjuk, hogy a B csúcsban meghúzott érintő érintési pontjának abszcisszája egyenlő az AC húr felezőpontjának abszcisszájával, azaz

$$b = \frac{a+c}{2}.$$

II. 2. feladat. Ha az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbola első síknegyedben levő ágán rögzítjük egy tetszőleges, beírt ABC háromszög két szélső csúcsát, A-t és C-t, akkor hol kell felvenni a hiperbolán a közbülső B csúcsot, hogy az ABC háromszög területe maximális legyen?

1. megoldás. Rögzített A és C csúcs mellett akkor maximális a beírt háromszög területe, ha a B csúcs az AC oldallal párhuzamos érintő érintési pontja, mert akkor lesz maximális a háromszög rögzített AC oldalához tartozó magasság hossza (2. ábra). Tehát az $y = \frac{1}{x}$ függvény deriváltjának az $x = b$ helyen egyenlőnek kell lennie az AC oldal iránytangensével, azaz

$$-\frac{1}{b^2} = -\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{c-a} = -\frac{1}{ac},$$

amiből

$$b^2 = ac, \quad \text{azaz} \quad b = \sqrt{ac}$$

Tehát a beírt ABC háromszög területe akkor maximális, ha a B csúcs abszcisszája a két szélső csúcs abszcisszájának mértani közepe, más szóval ha a, b, c egy mértani sorozat egymást követő tagjai.

2, megoldás. A 2. ábra jelölései szerint a beírt háromszög A, B, C csúcsának koordinátái: $\left(a; \frac{1}{a}\right)$, $\left(b; \frac{1}{b}\right)$, $\left(c; \frac{1}{c}\right)$, ezért a háromszög kétszeres területe:

$$2t_{ABC} = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ b & \frac{1}{b} & 1 \\ c & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ b-a & \frac{1}{b}-\frac{1}{a} & 0 \\ c-a & \frac{1}{c}-\frac{1}{a} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right) - (c-a)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) =$$

$$= \frac{b}{c} - \frac{a}{c} - \frac{b}{a} + 1 - \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} - 1 =$$

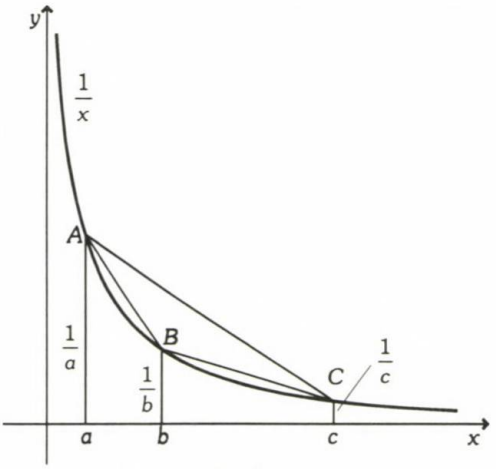
$$= \frac{b-a}{c} + \frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} = f(b) \qquad (2)$$

Ez pedig akkor maximális, ha b szerinti deriváltja nullával egyenlő, azaz

$$f'(b) = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{a-c}{b^2} = 0,$$

vagyis

$$\frac{a-c}{b^2} = \frac{a-c}{ac}, \quad \text{amiből} \quad b = \sqrt{ac}$$



2. ábra

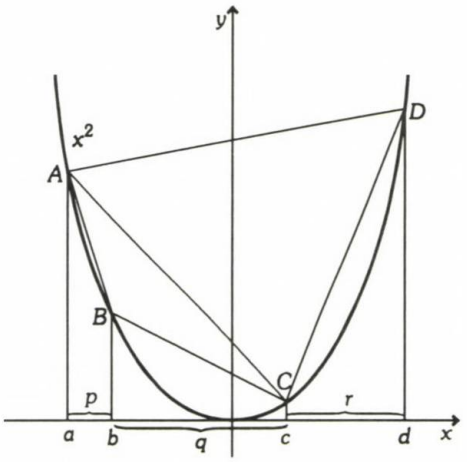
Érdekes, hogy az első feladatban számtani, a másodikban pedig mértani sorozat egymást követő tagjai a maximális területű beírt háromszög csúcsainak abszcisszái. Felvetődik a kérdés, hogy vajon beírt $ABCD$ négyszögek esetén is, ha a két szélső csúcsot, A-t és D-t rögzítjük, akkor maximális a terület, amikor a csúcsok abszcisszái számtani, illetve mértani sorozatot alkotnak aszerint, hogy az $y = x^2$ parabolába, vagy az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola jobboldali ágába írjuk a négyszöget. Most ennek vizsgálata következik.

III. Az 1. feladat általánosítása beírt négyszögekre.

Írjunk az $y = x^2$ egyenletű parabolába egy tetszőleges $ABCD$ négyszöget és rögzítsük a két szélső csúcsát, A-t és D-t! Határozzuk meg a közbeeső B és C csúcs helyét a parabolán úgy, hogy az $ABCD$ négyszög területe maximális legyen!

1. megoldás. Jelöljük a négyszög csúcsainak abszcisszáit a megfelelő kisbetűkkel, a-, b-, c-, d-vel ($a < b < c < d$) és a szomszédos csúcsok abszcisszáinak különbségét p-, q-, r-rel (3. ábra). Akkor

$$b - a = p, \quad c - b = q, \quad d - c = r$$



3. ábra

Ezután az AC átlóval a négyszöget két háromszögre bontjuk és felhasználjuk a beírt háromszögek területének (1) alatt levezetett képletét. Ennek alapján

$$2t_{ABCD} = 2t_{ABC} + 2t_{ACD} = pq(p+q) +$$
$$+ (p+q)r(p+q+r) = (p+q)(pq + pr +$$
$$+ qr + r^2) = (p+q)[p(q+r) + r(q+r)] =$$
$$= (p+q)(q+r)(p+r) \qquad (3)$$

Mivel pedig e szorzat tényezőinek összege

$$2p + 2q + 2r = 2(p+q+r) = 2(d-a)$$

állandó, hiszen a négyszög két szélső csúcsa rögzített, ezért $p+q$, $q+r$ és $p+r$ számtani és mértani között fennálló egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt[3]{(p+q)(q+r)(p+r)} \le \frac{2(p+q+r)}{3} = \text{áll.}$$

Ebből következik, hogy a (3) alatti szorzat és vele együtt a beírt négyszög területe akkor maximális, ha

$$p+q = q+r = p+r, \quad \text{amiből} \quad p = q = r$$

Ez azt jelenti, hogy maximális területű beírt négyszög esetén az A, B, C, D csúcsok abszcisszái egy számtani sorozat egymást követő tagjai.

2. megoldás. Ha a beírt négyszög kétszeres területére (3) alatt kapott szorzatot a négyszög csúcsainak abszcisszáival fejezzük ki, akkor az

$$f(b, c) = (c - a)(d - b)(b - a + d - c)$$

kétváltozós függvényhez jutunk. A szélsőérték létezésének első feltétele szerint csak azon a helyen lehet szélsőérték, ahol az elsőrendű parciális deriváltak nullával egyenlők, tehát

$$f_b'(b, c) = (c - a)(a - b + c - d + d - b) =$$

$$= (c - a)(a - 2b + c) = 0$$

és

$$f_c'(b, c) = (d - b)(b - a + d - c + a - c) =$$

$$= (d - b)(b - 2c + d) = 0$$

E két egyenletből

$$b = \frac{a + c}{2} \quad \text{és} \quad c = \frac{b + d}{2}$$

Eszerint akkor maximális az $ABCD$ négyszög területe, ha a, b, c, d egy számtani sorozat egymást követő tagjai.

Bár a geometriai ábrázolásból világosan kitűnik, hogy létezik a maximum, mégis a teljesség kedvéért foglalkozzunk a szélsőérték létezésének második feltételével is! A másodrendű parciális deriváltak:

$$f_{b^2}'' = -2(c - a), \quad f_{c^2}'' = -2(d - b),$$

$$f_{bc}'' = a - 2b + c + c - a = 2(c - b),$$

következtekésképpen a második feltétel:

$$f_{b^2}'' \cdot f_{c^2}'' - f_{bc}''^2 =$$

$$= 4(c - a)(d - b) - 4(c - b)^2 > 0$$

Ez teljesül, mert $c - a$ is, meg $d - b$ is nagyobb, mint $c - b$ (lásd a 3. ábrát). Tehát a szélsőérték létezik, továbbá maximum, mert a tiszta másodrendű parciális deriváltak negatívak.

IV. A 2. feladat általánosítása beírt négyszögekre.

Írjunk az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbola jobboldali ágába egy tetszőleges $ABCD$ négyszöget és rögzítsük a két szélső csúcsát, A-t és D-t! Határozzuk meg a B és C csúcs helyét a görbén úgy, hogy az $ABCD$ négyszög területe maximális legyen!

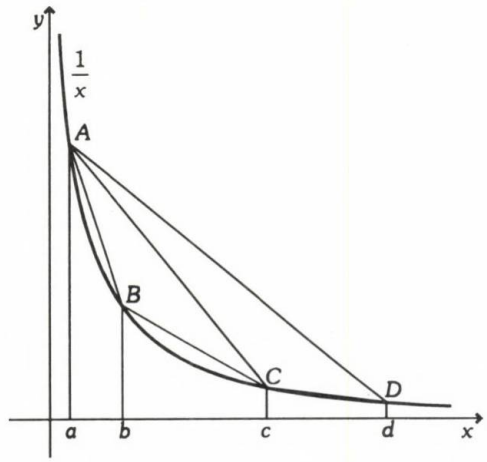
Megoldás. A jelölések ugyanazok, mint a III. részben, a és d rögzített (állandó), b és c változó és most $0 < a < b < c < d$ (4. ábra). A beírt $ABCD$ négyszöget most is két háromszögre osztjuk az AC átlóval és felhasználjuk a beírt háromszög kétszeres területének (2) alatti képletét. Akkor

$$2t_{ABCD} = 2t_{ABC} + 2t_{ACD} = \frac{b - a}{c} + \frac{c - b}{a} +$$

$$+ \frac{a - c}{b} + \frac{c - a}{d} + \frac{d - c}{a} + \frac{a - d}{c}$$

Így a következő kétváltozós függvényt kapjuk:

$$f(b, c) = \frac{d - b}{a} + \frac{a - c}{b} + \frac{b - d}{c} + \frac{c - a}{d}$$



4. ábra

Azt kell kiszámítani, hogy ennek a függvénynek az értéke mekkora megengedett b és c érték esetén maximális.

Mivel szélsőérték csak ott lehet, ahol a függvény elsőrendű parciális deriváltjai nullával egyenlők, ezért

$$f_b'(b, c) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{a-c}{b^2} = 0 \quad \text{és}$$

$$f_c'(b, c) = \frac{1}{d} - \frac{1}{b} - \frac{b-d}{c^2} = 0$$

Az egyik egyenletből

$$\frac{a-c}{b^2} = \frac{a-c}{ac},$$

azaz $b^2 = ac$ és $b = \sqrt{ac}$

A másik egyenletből pedig

$$\frac{b-d}{bd} = \frac{b-d}{c^2},$$

vagyis $c^2 = bd$, $c = \sqrt{bd}$

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f_{b^2}'' = 2\frac{a-c}{b^3}, \quad f_{c^2}'' = 2\frac{b-d}{c^3} \quad \text{és}$$

$$f_{bc}'' = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{c^2-b^2}{b^2c^2}$$

Ezek felhasználásával a szélsőérték létezésének második feltétele:

$$f_{b^2}'' f_{c^2}'' - f_{bc}''^2 =$$

$$= 4\frac{(a-c)(b-d)}{b^3c^3} - \frac{(c^2-b^2)^2}{b^4c^4} > 0$$

Mivel az első feltétel szerint a, b, c, d egy mértani sorozat egymást követő tagjai, ezért $b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$. Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket a második feltételbe, kapjuk, hogy: $4a^2q - a^2q > 0$.

Ez igaz, tehát létezik a szélsőérték, továbbá maximumot kaptunk, mert a tiszta másodrendű parciális deriváltak negatívak, végül pedig az első feltétel alapján a beírt négyszög csúcsainak abszcisszái ebben az általánosított feladatban is egy mértani sorozat egymást követő tagjai.

Végül megemlítem, hogy négynél több oldalú beírt sokszögek esetén is érvényes, hogy akkor maximális a területük, ha a csúcsok x koordinátái számtani, illetve mértani sorozat egymást követő tagjai aszerint, hogy az $y = x^2$ egyenletű parabolába, illetve az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbola jobboldali ágába írjuk a sokszöget. Itt is így bizonyíthatunk, mint a beírt négyszögek esetében, vagyis a beírt sokszög területét jelentő többváltozós függvény elsőrendű parciális deriváltjait egyenlővé tesszük nullával és az így kapott egyenletekből következik a tétel állítása.

Bonifert Domonkos

Néhány tipikus problémaszituáció matematikából

Feladatok és megoldások érdeklődő diákoknak és tanároknak

Az olvasó olyan példatárat vehet a kezébe, amelyben a feladatok nem a megszokott témakörök, hanem megoldási eljárások szerinti csoportosításban találhatók. A fejezetcímek:

I. Függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek
II. Bizonyítások
III. Szélsőérték-feladatok
IV. Van olyan? Számlálási technikák
V. Egyéb érdekességek

A kötet sajátossága, hogy ugyanazon probléma megoldását többféle módszerrel, más-más szintű megközelítésben, az ötletek sokaságának felhasználásával mutatja be. A feladatok tanulmányozása, feldolgozása tehetséges általános és középiskolai tanulók, valamint az őket tanító tanárok számára is hasznos lehet.

Megjelent ára: 359,- Ft

Ujvári István

Egy újszerű vetélkedő Vácott

Minden iskolában jelen vannak a tehetséges gyerekek, de nem mindegyik tehetséget ismerik fel időben a pedagógusok. Ennek okai sokfélék. Ott van közöttük az is, hogy a különböző tehetségfajták más és más életkorban jelentkeznek. Így a matematikai tehetség igen korán, esetleg már a korai gyermekkorban, a humán irányultságú viszont csak a középiskola vége felé, vagy felnőtt korban. Ez az oka annak, hogy míg a tehetségkutató matematikai tanulmányi versenyek egymást érik az általános és középiskolákban, az irodalmi és történelmi megmérettetések száma jóval kevesebb. Így aztán gyakran előfordul, hogy már „elkötelezte" magát a matematikának az a gyerek, aki a humán tudományok művelésében talán többre lenne képes.

A városunkban működő Matematikai Tehetségfejlesztő Központ tanárai úgy gondolták, hogy a szaktárgyukból adódó helyzeti előnyből jut a más irányú tehetséges gyerekek felfedezésére is. Elhatározásukban még egy prózaibb ok is közrejátszott: a város pénztárcája fölött őrködő képviselőtestület matematikaversenyre nem, várostörténetire azonban igen szívesen kinyitotta azt.

Ebből az alaphelyzetből született annak a versenynek az ötlete, amely egész tanévben foglalkoztatta a 6 váci általános iskola tanulóit és a helyi sajtó révén a városukat szerető felnőtt polgárokat is. Az iskolai csapatok hónapról hónapra 1-1 komplex versenyfeladatot kellett megoldaniuk, melyek két részből álltak: egy érdekes matematikafeladat megoldásaként kapott négyjegyű számot évszámként értelmezve kellett egy helytörténeti kérdésre válaszolniuk.

Ez a „SZÁMON-KÉRT" MÚLT elnevezésű verseny újfajta tehetségek kibontakozását segítette elő. A meglehetősen nehéz feladatok megoldásához matematikán pallérozott logikus gondolkodásra és a város múltjáról rendszerint csak szorgos könyvtári kutatómunkával előbányászható ismeretekre volt szükség.

A városszerte nagy érdeklődést kiváltott feladatokat az alábbiakban közöljük, a megoldásokat nagyon rövidre fogva.

1. Hány négyzet van a sakktáblán? Mekkora ezek összterülete?

A területnek ez a mérőszáma egy négyjegyű szám, mely évszámnak is tekinthető. Mi volt az a világhírű sporttörténeti esemény ebben az évben, amelyre a váciak különösen büszkék voltak?

Megoldás: Az évszám: 1968, a mexikóvárosi olimpia éve. Ennek kajak egyes versenyszámában, 1000 méteren győzött a váci HESZ MIHÁLY.

2. Ritka az olyan év, amelynek február hónapjában 5 hétfő van. Századunkban ez mindössze négyszer fordult elő.

Az egyik ilyen évben, de egy őszi hónapon hunyt el az a híres művész, aki korábban váci diák volt. Nevezzétek meg őt!

Megoldás: LOTZ KÁROLY festőművész, aki 1904-ben halt meg.

3. Melyek azok az évszámok évezredünkben, amelyeknek számjegyei között a különbségek: 1, 2, 3, 4, 5 és 6?

Legalább három ilyen évszámhoz találjatok egy-egy személyt, aki az illető évben Vácott lakott és jelenleg utca van róla elnevezve városunkban.

Megoldás: Három számnégyesből - 0, 1, 4, 6; 1, 2, 5, 7; 1, 3, 6, 7 - egyenként 6, összesen tehát 18 ilyen évszám képezhető. Közülük azonban mindössze 4-hez található jelenlegi utcanévadó személy, pl. 1637-hez BENICZKY PÉTER, a költő.

4. Keressetek szabályt és folytassátok az alábbi számsorozatot városunk iskolatörténetében kiemelkedő szerepet játszó személy halálozási évszámáig:
1993, 1971, 1953, 1935, ...

Kiről van szó és hol található az emléktáblája?

Megoldás: Az évszámok számjegyeinek összegét kivonva az előző évszámból 1899-hez is eljutunk, mely az iskolaépítő SCHUSTER KONSTANTIN püspök halálozási évszáma.

5. Egy XX. századbeli évszám prímszám, számjegyeinek összege pedig FERMAT-féle prímszám. Melyik ez az évszám?

Keressetek olyan emléktáblát a városban, amelyen ez az évszám olvasható! Írjátok le a tábla szövegét!

Megoldás: A feltételnek csak az 1907 felel meg. Ez az évszám három váci emléktáblán is olvasható.

6. Melyik az a négyjegyű szám, amelyet 9-cel való szorzás „megfordít"? (Azaz: a szorzat jegyei ugyanazokat a számjegyeket tartalmazzák mint amelyek a keresett szorzandóban vannak, csak fordított sorrendben.)

Az eredeti négyjegyű számnak cseréljétek fel két számjegyét úgy, hogy az így kapott évszám egy váci iskola névadójának születési évszáma legyen. Fogalmazzátok meg az illető személy Váchoz fűződő kapcsolatait!

Megoldás: A keresett négyjegyű szám az 1089. A számjegy – cserékkel előállítható számok közül 1809 a megoldás. Ebben az évben született FÖLDVÁRY KÁROLY, a szabadságharc váci csatájának hőse.

7. Keressetek olyan négyjegyű számokat, amelyek 2 db kétjegyű prímszám egymás után írásából keletkeztek és oszthatók a két prímszám számtani közepével!

Válasszátok ki közülük azt, amelyben – ha évszámként kezeljük – országgyűlési választások voltak. Melyik párt nyert Vácott?

Megoldás: Az évszám: 1947. Vácott a Magyar Függetlenségi Párt (Pfeiffer Zoltán pártja) győzött.

8. Egy kétjegyű prímszámból, meg annak az ötszöröséből előállított évben egy templom építését fejezték be Vácott. Hány toronnyal készült el?

Megoldás: A váci templomok általában a XVIII. században épültek, így az 1785-ös évszám könnyen adódik. A helytörténeti kérdés jóval nehezebb volt: a megoldást jelentő református templom torony nélkül készült el, a jelenlegit később építették hozzá.

S néhány feladatötlet azok számára, akik hasonló vetélkedő megrendezésére vállalkoznak:

9. Ki volt az a nevezetes személyisége a városnak, aki az x^2-ik évben éppen x éves volt?

(A megoldáshoz: olyan személyt kell keresni, akinek születési évszáma 1406, 1482, 1560, 1640, 1722, 1806 vagy 1892.)

10. Egy évszámhoz hozzáadtuk a számjegyei összegét és így 2000-et kaptunk. Milyen helytörténeti esemény fűződik ehhez az évszámhoz?
(1981-hez kell ilyet találni.)

11. A sakktábla mezőin egy 64 betűből álló hélytörténeti esemény olvasható, ha a lóugrás szabályai szerint haladunk, a megjelölt betűből kiindulva. Mi ez az esemény?

(Ha a megfelelő szöveget elkészítettük, az elhelyezés pl. Andrásfai: Ismerkedés a gráfelmélettel c. könyvének 100. ábrája alapján elkészíthető.)

12. A $\frac{2000!}{92!}$ tört egyszerűsítése után mi lesz a 2 kitevője a számlálóban? Milyen esemény csatlakozik ehhez az évszámhoz?
(A számokat a megfelelő helytörténeti eseményhez igazíthatjuk.)

Dr. Csorba Ferenc - Náfrádi Ferenc

Megyei középiskolás matematikai verseny Győrött

1993. február 27-én közel százötven Győr-Moson-Sopron megyei tanuló részvételével matematikai versenyt szervezett a BJMT Győri Tagozata és a Megyei Pedagógiai Intézet. Nyolc szlovákiai középiskolából is hívtunk tanulókat.

A dolgozatok megírására két óra állt rendelkezésre. Más-más feladatsort kaptak a szakközépiskolások ás a gimnazisták. Első kategóriában a legfeljebb másodikosok, a másodikban pedig az idősebb tanulók versenyezhettek. A rendezvény helyszíne a győri Apáczai Csere János Tanítóképző Főiskola volt.

A KITŰZÖTT FELADATOK:

GIMNÁZIUM
I. KATEGÓRIA

1. Egy nagyobb terjedelmű könyv oldalszámozásához 2184 db számjegyre volt szükség. Hány lapos a könyv?

2. Adott egy r sugarú kör, amely egy 60°-os szög szárait érint. Ez a kör két pontban metszi a 60°-os szög szögfelezőjét.
   Mekkora távolságra vannak ezek a pontok a szög csúcsától?

3. $$|x| + |y| < 100$$
   Hány $(x; y)$ számpár elégíti ki az egyenlőtlenséget, ahol x és y egész szám?

4. Négy lány futóversenyen vett részt. A verseny után mindegyiket megkérdezték, melyik helyen végzett.

   Anna: Nem lettem sem első, sem utolsó.
   Bella: Nem lettem első.
   Csilla: Első lettem.
   Dóra: Én lettem az utolsó.

   Valaki, aki a versenyt látta azt mondta:

   „A négy válasz közül három igaz, egy hamis."

   Ki mondott valótlant? Ki volt az első? (Holtverseny nem volt.)

5. Ha $ab = 1$ és $ac + bd = 2$, akkor bizonyítsa be, hogy: $cd \leqq 1$ ahol a, b, c, d valós számok!

GIMNÁZIUM II. KATEGÓRIA

1. Adott hét szám. Bármelyik négyet kiválasztva összegük nagyobb a többi három összegénél. Bizonyítsuk be, hogy mindegyik szám pozitív!

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

3. Három kör középpontja A, B, C; mindegyik kör sugara r, ahol $1 < r < 2$. Bármely két kör középpontjának távolsága 2. Ha B' az A és C középpontú köröknek a B középpontú körön kívül eső metszéspontja, továbbá C' az A és B középpontú köröknek a C középpontú körön kívül eső metszéspontja, akkor mekkora a $B'C'$ szakasz hossza?

4. Az ABC hegyesszögű háromszög B csúcsából induló magasság egyenese az AC átmérőjű kört X és Y pontokban, a C csúcsból induló magasság egyenese az AB átmérőjű kört az U és Z pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy X, Y, U, Z pontok egy körön vannak!

5. Van-e olyan n egész szám, amely mellett az $n^2 + 46n + 4441$ kifejezés egy természetes szám negyedik hatványával egyenlő?

SZAKKÖZÉPISKOLA I. KATEGÓRIA

1. Melyik nagyobb:

$$A = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

vagy

$$B = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}} \; ?$$

2. Egy gazdaság öt telepe között a következő távolságokat ismerjük (a távolságok a telepek bejáratai között értendők): Almástól a Barackos 2 km-re van, innen Cseresznyés távolsága 1650 m. Cseresznyéstől Dinnyésig az út 8 és fél km, onnan Epres 3 és $\frac{3}{4}$ km. Végül Eprestől Almásig 1100 m-t kell megtennünk.

Mennyire van Eprestől Barackos?

3. Az $ABCD$ paralelogramma AB, AD oldalát és AC átlóját egy egyenes rendre az E, F és G pontokban metszi.

Határozzuk meg $\frac{AC}{AG}$ értékét, ha $\frac{AB}{AE} = 3$ és $\frac{AD}{AF} = 4$!

4. Határozzuk meg annak a 60 egységnyi kerületű téglalapnak a területét, amelynek az átlói a lehető legrövidebbek!

5. Hogyan kell egy nagy négyzethálós papíron 99 mezőt kijelölni úgy, hogy a kapott (nem feltétlenül összefüggő) alakzat kerülete a lehető legkisebb legyen?

SZAKKÖZÉPISKOLA II. KATEGÓRIA

1. Melyik nagyobb

$$A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1993}+1} \qquad \text{vagy} \qquad B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1994}+1} \; ?$$

2. Oldjuk meg a

$$\sqrt{4x^2-1}\left(\log_{\frac{1}{2}}(1-x)-3\right) < 0$$

egyenlőtlenséget!

3. Egy háromszög egyik szöge 105 °, e szög csúcsából kiinduló magasságvonal a szemközti oldalt $3-\sqrt{3}$ illetve $\sqrt{3}-1$ hosszúságú részekre osztja.

Számítsuk ki a háromszög másik két szögét!

4. Az ABC háromszög BC oldalával párhuzamos egyenes az AB oldalt a P, az AC oldalt a Q pontban metszi. Az AC oldal felezőpontja legyen F, a PQ és az FB egyenesek metszéspontja R. Bizonyítsuk be, hogy $PR + PQ$ állandó!

5. Tíz rabló egy többzáras ládában őrzi a kincsét. Minden rablónak bizonyos zárakhoz van kulcsa, egy zárhoz esetleg többnek is. A kulcsok úgy vannak elosztva, hogy semelyik három rabló se tudja a birtokában lévő kulcsokkal kinyitni a ládát, de bármelyik négy közülük már hozzá tud férni a kincshez.
Legalább hány zár szükséges a fenti feltételek teljesüléséhez?

EREDMÉNYEK

Gimnázium I. kategória

helyezés	tanuló	iskola	felkészítő tanár
I. helyezett	*Torda Eszter*	Kossuth L. Gimn., Mosonmagyaróvár	Gulyás Ferencné
II. helyezett	*Német Tibor*	Révai M. Gimn., Győr	Nagy Attila, Zsebők Ottó
III. helyezett	*Csorba István*	Révai M. Gimn., Győr	Tamás Imre, Zsebők Ottó

Gimnázium II. kategória

I. helyezett	*Benke Beáta*	Berzsenyi D. Evangélikus Gimn., Sopron	Piacsek István
II. helyezett	*Szabó Zoltán*	Bencés Gimnázium, Pannonhalma	Pintér Ambrus
III. helyezett	*Költl Péter*	Révai M. Gimn., Győr	Szabó Rudolfné, Zsebők Ottó

Szakközépiskola I. kategória

I. helyezett	*Szabó Lajos*	Deák F. Szakközépiskola, Győr	Pákozdiné Miletics Edit
II. helyezett	*Magyar Balázs*	Jedlik Á. Szakközépiskola, Győr	Kiss Anikó
III. helyezett	*Tóth József*	Jedlik Á. Szakközépiskola, Győr	Kovács Sándorné

Szakközépiskola II. kategória

I. helyezett	*Németh Róbert*	Hild J. Szakközépiskola, Győr	Soleckiné Giczi Katalin
II. helyezett	*Németh Balázs*	Hild J. Szakközépiskola, Győr	Kiss Imre
III. helyezett	*Balics József*	Hild J. Szakközépiskola, Győr	Nagy Erzsébet

Scharnitzky Viktor

A Rátz László Vándorgyűlésről

A Bolyai János Matematikai Társulat a XXXIII. Rátz László Vándorgyűlést 1993. július 6. és 9. között rendezte meg Szolnokon, több mint 600 résztvevővel, akik közül többen a környező országokból érkeztek.

A vándorgyűlést Hajnal András, a Társulat elnöke nyitotta meg, majd Katona Gyula, a Társulat főtitkára és Bartha Árpád, a Kereskedelmi, Vendéglátóipari és Idegenforgalmi Főiskola igazgatója üdvözölte a résztvevőket.

Ezután került sor a Beke Manó Emlékdíjak átadására. A Beke Manó Emlékdíj Bizottság egyhangú határozata alapján

Az emlékdíj I. fokozatában részesült

DR. PINTÉR LAJOS docens, JATE, Bolyai Intézet, Szeged

Az emlékdíj II. fokozatát kapta

HASMANN KÁROLYNÉ vezető tanítónő, FPI, Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola, Budapest;

KÁROLYI KÁROLY tanár, Általános Iskola, Bátaszék

DR. PINTÉR FERENC tanár, Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa;

SZABÓ KATALIN tanár, Batsányi János Gimnázium, Csongrád;

SZEGHŐ LÁSZLÓNÉ nyugdíjas tanár, II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola, Baja.

A díjkiosztás után két plenáris előadás hangzott el, Laczkovich Miklós: *Alakzatok felbontása egybevágó háromszögekre* és Kuti Gusztávné: *Milyen a jó tankönyv?* címmel.

A következő három napon a résztvevők három szekcióban, nevezetesen a 6-10 éveseket tanítóknak ajánlott alsó tagozatos, a 10-14 éveseket tanítóknak ajánlott felső tagozatos, a 14-18 éveseket tanítóknak ajánlott középiskolai szekcióban, valmint a felsőoktatási ankéton gyarapíthatták ismereteiket, mondhatták el véleményüket, cserélhették ki oktatási tapasztalataikat.

Az idén összesen 28 előadás hangzott el. Ezek témája egy-egy új tankönyv bemutatásától (pl. C. Neményi Eszter - Szilágyiné Oravecz Márta: *Az új elsős tankönyvről*) egy-egy konkrét didaktikai kérdés megvitatásán át (pl. Szeredi Éva: *Szöveges feladatok diszkussziója*) új matematikai eredmények ismertetéséig (pl. Petruska György: *Tipikus folytonos függvények*) terjedő széles skálán helyezkedtek el. Az előadások mellett három feladatmegoldó szeminárium működött kilenc témakörben, két ankét zajlott le (az iskolák szerkezetváltásának módjairól és az ICMI *Mi a matematikaoktatási kutatás szerepe* című vitaanyagról) és számos, a matematika tanításában használt programot mutattak be a szerzők. A vándorgyűlés új színfoltja Kovács Zoltán Játszóháza volt.

A szakmai programhoz tartozott a Fejér Lipót és Reisz Frigyes életéről és munkásságáról készített videofelvételek bemutatása, illetve a 100 éves KÖMAL tiszteletére rendezett kiállítás, amely több tucat dokumentum segítségével mutatta be a világhírű és népszerű folyóirat történetét.

A szakmai programot a szolnoki Tisza Táncegyüttes műsora és egy fakultatív kirándulás tette színesebbé, sok-sok baráti találkozás és beszélgetés tette emlékezetesebbé.

A jövő évi vándorgyűlés Pécsett lesz.

Vancsó Ödön

Mat-kapocs tájékoztató

Ebben a rövid cikkben bemutatunk egy induló országos matematika-tanár egyesületet. A Bolyai János Matematikai Társulat, és az ELTE TTK támogatásával induló MAT-KAPOCS egyesület – amelynek a bejegyzése jelenleg folyamatban van – a matematika tanárok számára szeretne egy olyan nyilvános fórumot, s egy folytonosan bővülő adatbázist kínálni, amely reményeink szerint egy pezsgést indíthat meg ezen a területen. A következőkben szeretnénk főbb céljainkat felsorolni, majd néhány szót szólni a szervezés és a munkánk jelenlegi helyzetéről, végezetül arról, hogyan lehet az érdeklődőknek információkhoz jutni egyesületükről.

Céljaink:

- Szabad információáramlás biztosítása, amellyel az országos esélyegyenlőség feltételeit kívánjuk legalább az oktatás egyes területein javítani
- kapcsolatfelvétel és lehetőség szerint együttműködés minden, a matematikaoktatás fejlesztéséért tevékenykedő társasággal, illetve általában minden olyan pedagógiai társasággal, amelyik fontosnak tartja az oktatási-nevelési folyamat demokratizálását, amelynek fő elemei:
  a nyilvánosság, és az információs monopólium eltörlése mind az intézményi, a területi, mind a tanár-diák viszonyban.
- Kísérlet egy specifikusan matematika-oktatási piac létrehozására, ahol az egyes produktumok a nagy nyilvánosság előtt méretnek meg, s ahol senki sincs hatalmi helyzetben, sem intézmények, sem személyek.
- Közös alkotás, amelyet az információ gyors áramlása biztosít, e célból:
  egy számítógépes információs hálózat kiépítése a tagok között,
- kis, eldugott települések tanárait bekapcsolni egy nagyobb szellemi vérkeringésbe,
- matematika-oktatási irányzatok és anyagaik megismerése, adaptációk, kísérletek szervezése,
- magyar alkotó tanároknak lehetőség biztosítása, akár csak kisebb ötleteik nyilvánosságra hozatalához, kipróbálásához, illetve véleményezéséhez;
- folyamatos szakmai tanácsadás;
- matematika-oktatással kapcsolatos információk terjesztése;
- a szerzők illetve a kísérletezők, bírálók szakmai anyagokkal való ellátása;
- a matematika-didaktika egy magyarországi kísérleti bázisának megteremtése;
- alternatív tantervek, tanagyagok létrehozása, egy sokszínű „piac" megteremtéséhez;
- a hasonló céllal létrejött más szakos tanárhálózatokkal való együttműködés, esetleg közös információs rendszerben;
- a matematika-oktatás sokszínűbbé tétele, a matematika alkalmazásai illetve a matematika és a mindennapi élet kapcsolódási pontjainak nagyobb súlyú figyelembe vétele;
- különböző érdeklődésű, és képességű gyerekek számára más-más megközelítésű matematika-oktatás feltételeinek javítása;

- számítógép és matematika, a kapcsolatok tisztázása, a matematika-oktatás számára készült programcsomagok bemutatása, esetleg próbája vagy terjesztése;
- általában a számítástechnikai kultúra terjesztése, előnyeinek bemutatása;
- oktató, és oktatást támogató szoftverek terjesztése.

Néhány konkrét eddig bejött ötlet: feladatsorok, közvetlenül versenyek után a megoldások elhelyezése. Nemsokára elkészül a 100 éves KÖMAL teljes számítógéppel feldolgozott cikk- és feladatanyaga, ennek elhelyezése az adatbankban. Nugyat-európai tananyagok adaptációi, hazai tanárok eddig elfekvő anyagai, ötletei az oktatás színvonalának javítására, oktatási szoftverek bemutatása, stb.

Céljaink elérésére munkacsoportokat kívánunk létrehozni, egyrészt a tartalmi munka elindításához, másrészt az információs hálózat kiépítéséhez. Egyelőre a következőkre gondoltunk:

1. Kísérletező tanárok csoportja, akik megfelelő feltételekkel vállalják, hogy akár hazai, akár adaptált külföldi oktatási anyagok feldolgozásában, kísérletek elvégzésében és azok értékelésében részt vesznek.
2. A nemzetközi matematika-oktatási irányzatokat figyelők csoportja, akik a folyóirat, könyv, tankönyv és egyéb anyagok alapján megkísérelnek képet adni a világban zajló fő folyamatokról, különös tekintettel a magyar viszonyokra.
3. Fordító és lektorcsoport.
   Feladatuk az adott idegen nyelven nem beszélő tanárok számára hozzáférhetővé tenni (esetleg kísérleti célzattal) külföldi oktatási anyagokat, didaktikai elképzeléseket, tanterveket.
4. Oktatási pályázatokat figyelők, és intézményi kapcsolatokat ápolók csoportja.
5. Számítógépes oktatóprogramokat, illetve az oktatásban felhasználható szoftvereket terjesztők, informatikában jártasabb tanárok csoportja.
6. Az adatbázis fontos részét képező, mindennapi munkához szükséges információkat gyűjtők (versenyek, dolgozatok, érettségi, stb).
7. Az információs rendszert működtetők csoportja, vezetőjük a „rendszergazda".
8. Szakmai irányítással, tanácsadással foglalkozók csoportja.

Jelenlegi helyzetünkről a következőket mondhatjuk. Az egyesület egy telefonon elérhető BBS rendszerre gondolt első lépésben, amelynek központi gépe induláskor egy telefonvonallal az egyesület székhelyén (ELTE TTK Rákóczi út 5.-ben) kerülne elhelyezésre. Ezen a gépen helyeznénk el a közérdekű információkat, illetve a nálunk éppen fellelhető tantervek, tananyagok, tanítási ötletek, feladatsorok, kísérleti tervek tömör leírását. Ezt tagjaink telefonon (saját, vagy remélhetőleg iskolájuk költségére) felhívhatják minden korlátozás nélkül. Amennyiben egy anyag érdekli őket, akkor azt postai utánvétellel számítógépes lemezen (kérés szerinti lemezen) elküldjük. Ez biztosítja jelenlegi ismereteink szerint a legolcsóbb átvitelt, mert egy nagyobb anyag telefonon történő átvitele költséges, s nagyon időigényes, a rendszer működési feltételeit nagyon hátrányosan módosítja. A minimális feltétel a csatlakozáshoz egy személyi számítógép, és egy a telefonhálózatra csatlakozást biztosító modem. Érdeklődőknek legalább a használat idejére egy telefonvonal szükséges. Akár magánlakásból, akár iskolából lehet csatlakozni. Remélhetőleg a csatlakozás olyan mértékben javítja a tanítás feltételeit, hogy a megnövekedett telefonköltség nem lesz akadálya a belépésnek. Természetesen az iskola vezetői ezt egy bizonyos összegben maximalizálhatják, s akkor a tanár maga választ, hogy mihez tud ennyiért hozzáférni.

Szervezetileg a munkát egy 12 fős operatív bizottság irányítja, akiket a szolnoki, 1993. július 9-10-i alakulóülésen választott meg a jelenlevő 89 alapító tag. Az Operatív Bizottságot egyelőre Vancsó Ödön vezeti, dr. Vásárhelyi Éva a titkár, Mentel Gyula a rendszergazda, (mindhárman az ELTE dolgozói), Makara Ágnes a gazdasági ügyvezető, (Budapesti Tanítóképző Főiskola), tagjai dr. Deák Ervin (MTA Mat. Kut. Intézet), Holló-Szabó Ferenc (ELTE TFK Matematika Tanszék), Hubert Tibor tanár (Bp. Kvassay Jenő SzKI), Munkácsy Katalin (ELTE TFK Mat. Tanszék), Nyirati László tanár (szaktanácsadó Székesfehérvár), dr. Szendrei János (Szeged Juhász Gyula Tanárképző Főiskola), dr. Tompa Klára (OKI Bp.), Zombori József tanár (AKG Bp.)

Már korábban is volt két kísérlet a megalakulásra, s minden eddigi érdeklődőt számontartva 250 körüli induló tagságra számítunk. Az alapító-közgyűlés az éves tagdíjat 1200 Ft-ban határozta meg. Fontos lesz munkák financiális hátterére egy közcélú alapítvány létrehozása, amelyet bejegyzésünk után azonnal elindítunk. Ekkor a tagdíjak is leírhatók lennének az adóalapból.

Várjuk minden érdeklődő kollégánk jelentkezését – bármelyik szintjén is dolgozik a oktatásnak – aki hozzá tud járulni információs bázisunk minél gyorsabb feltöltéséhez, illetve aki jelzi, hogy személy szerint neki mi jelentene segítséget. Erről már vannak anyagaink, de örülnénk, ha a matematika-tanároknak minél szélesebb rétege mozdulna meg .

Akit érdekel egyesületünk, annak tudunk alapszabályt, belépési nyilatkozatot, illetve az eddig elértekről egy rövid összefoglalót küldeni. Az érdeklődő címét nyilvántartjuk a kapcsolattartáshoz.

Elérési módok: Cím ELTE TTK Matematika Szakmódszertani Csoport MAT-KAPOCS 1088 Budapest Rákóczi út 5.

Telefonon: (Ameddig nem éled föl a rendszer első fővonala) 2669-833/128, 195, 196-os mellékek.

Fax: Vancsó Ödön Mat. Szakm. Csop. 2667952,

E-mail: vancso@ludens elte.hu., mentler@ @ludens elte.hu. vagy vasar@ludens elte.hu. Internet címeken.

Dienes Péter

Szokatlan beszámoló egy matematikai táborról

Szokatlan és érdekes. Ezt válaszoltam szüleimnek, amikor megkérdezték, hogy milyen volt a matektábor Szegeden. Szokatlan és érdekes. Hogy miért szokatlan? Már jártam egypár matektáborban, s ott többnyire feladatokat oldottunk meg. Itt szervezett keretek között 12 alkalommal találkoztunk a matematikával, s ebből csak kétszer két órát töltöttünk feladatok megoldásával, ugyanis Pintér Lajos (a tábor legfőbb szervezője) szerint: „a matematika nemcsak feladatok megoldása, hanem kutatás is, s sokszor a feladatmegoldás a kutatás rovására megy. Elég sok jó feladatot oldanak meg ők az iskolában és szakkörökön..." Vajon hogyan gondolták ezt a kutatást? – kérdezheti most bárki. – Biztosan előadásokat hallgattak. S valóban igaz, hogy sok érdekes előadást hallgattunk, de nem ez volt a Nagy Ötlet. A Nagy Ötlet tényleg zseniális: dugjuk be a gyerekeket a könyvtárba, ahol kedvükre olvashatnak matematikai folyóiratokat, könyveket; ahol utánanézhetnek egy-egy előadás témájának, problémáinak; elmélyedhetnek a matematika egy-egy részében; megtanulhatják gondolataik formálását; eltáthatják a

szájukat egy-egy zseniális ötlet olvasásakor s kedvükre kutathatnak.

Az elinduláshoz néhány fénymásolt cikk nyújtott segítséget, amelyek közül még az első előadás előtt ki-ki kedve szerint választhatott. Elég nehéz volt választani, mert azért az ember mégsem vihette el az összes cikket. Az volt a legnagyobb feladat, hogy eldöntsem, miről szeretnék leginkább olvasni: arról, hogy a Pascal-háromszög n-dik sorában hány páratlan szám van vagy inkább a nyolcpontos körről vagy a négyzetek négyzetekre bontásáról, esetleg a Δ-alakzatokról vagy a Kakeya-Besicovitch-problémáról (amely arra keres választ, hogy mekkora területet súrol egy egységhosszúságú AB szakasz, miközben úgy mozgatjuk a síkon, hogy A B-be és B A-ba kerüljön).

Itt fekszik előttem az „órarendem" a június 21-től 25-ig tartó hétre, s most kedvtelve böngészem. Hétfő: Hatvani László előadása a differenciál-egyenletekről, Nagy Péter előadása a sík és a tér egybevágósági transzformációiról. „Szerda 8-12: Számítástudományi délelőtt" Ez mit takar? Szerdáig számomra is homályos volt, de most már tudom: Gaizer Tamás a véletlenszám-generálásról beszélt, ezen belül is a számítógépes véletlenszám-generálásról, majd utána az RSA titkosítási rendszerről, ami engem teljesen meglepett, mert eddig nem tudtam, hogy meg lehet azt csinálni, hogy bárki tud nekem üzenetet küldeni, s azt csak én tudom visszafejteni. Érdekes volt hallgatni Szőkefalvi-Nagy Béla „meséit" a szegedi matematikai iskola történetéről, a „régi nagyokról": Reisz Frigyesről, Haar Alfrédról, Fejér Lipótról és a saját matematikai (és nem matematikai) kalandjairól. Csodálatos ötletek záporoztak ránk, amikor pénteken Hajnal Péter néhány kombinatorikai és számelméleti tételt (pl. a kis Fermat-tételt, a Wilson-tételt, stb.) bizonyított be előadásán, amely a kombinatorika és a halmazelmélet összekapcsolódását mutatta be.

Essék néhány szó a feladatokról, mert azért azok sem voltak „szürkék és hétköznapiak". A mintegy 30 többnyire második-harmadikos specmatekos résztvevőt két csoportra osztották, s két matematikushallgató gondjaira bíztak, akik mindent megtettek, hogy jó problémákkal lássanak el minket. Mi Maróti Miklóssal kedden játékokat elemeztünk, pénteken pedig gráfokat színezgettünk, persze nem teljesen össze-vissza. A másik csoport Balogh József irányításával oldott meg izgalmas és szép feladatokat.

Ha megkérdeznék tőlem, hogy a tábor melyik napja tetszett legjobban, akkor rövid gondolkodás után a csütörtököt választanám. A délelőtt Csákány Béla „ízes" előadásával kezdődött, mely az „Algebrai struktúrák állatkertje" címet viselte, s amelyből megismertük az algebrai struktúrák alak- és élettanát, genetikáját. Állatkerti sétánk után következett a „Vidám Park". Kincses János kombinatorikus-geometriai előadása az egyenes- és pontrendszerekről. Problémák, tételek, bizonyítások szórakoztatóan színes forgataga került elénk, s ott volt az „Óriás Kerék" is: a nekem legjobban tetsző bizonyítás, amelyet immár ötödjére végiggondolva is még mindig kellemesen borzongok, és nem tudok betelni a szépségével. Ez az előadás még este is „kísértett", ugyanis Kincses János hivatkozott egy publikációban kimondott tételre, amelyet Pintér tanár úr lefénymásolt nekünk. Este nyolckor hozzáfogtam elolvasni, s ez is feliratkozott a „Legszebb Bizonyítások" listájára, olyannyira, hogy kilenckor, amikor minden porcikájában felfogtam, az összes elém kerülő embernek el kellett mondanom, hogy milyen nagyszerű, s azóta is mindenkinek ajánlgatom, hogy olvassa el.

Amikor hazajöttem a táborból éppen egy ismerősünk volt nálunk, s én elmeséltem neki, hogy mi mindent csináltunk. Miután befejeztem az elbeszélést kissé gúnyosan megkérdezte: „És ez nektek jó?" Igen, nagyon jó! Olyannyira jó, hogy remélem jövőre is lesz ilyen tábor, sőt örülnék, ha egy szép és hasznos hagyomány lenne belőle, s minden évben megtartanák. Esetleg máshol is rendeznének ilyen táborokat...

Matematika feladatmegoldó verseny II. forduló

KÖZLEMÉNY

Tájékoztatjuk kedves olvasóinkat, hogy A matematika tanítása szeptemberi (1993/4.) számának késői megjelenése miatt a meghirdetett **feladatmegoldó verseny nevezési határidejét meghosszabbítottuk 1993. december 31-ig.**

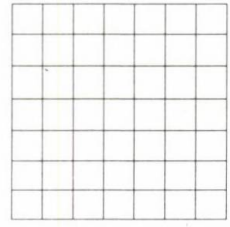
Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5-6. osztályosoknak)

93.9. Egy sorozatot a következőképpen képezünk. A sorozat első tagja egy pozitív egész szám (pl. háromjegyű), ennek a számjegyeit köbre emeljük, az eredményeket összeadjuk, így kapjuk a sorozat második tagját. Ennek számjegyeit ismét köbre emeljük, az eredményeket összeadjuk, így kapjuk a sorozat harmadik tagját; és így tovább.

Bizonyos számok esetében ciklikus sorozatot kapunk. Például:

Keressünk minél többféle ilyen ciklust a legfeljebb 3-jegyű egész számok körében!

93.10. Egy 7 × 7-es „sakktáblán" 19 mezőt beszíneztünk. Azt mondjuk, hogy egy sort, vagy egy oszlopot beszíneztünk, ha a megfelelő sor, vagy oszlop legalább 4 beszínezett mezőt tartalmaz. Legfeljebb hány sor és oszlop lehet beszínezve összesen?



93.11. A 185 osztható 37-tel, mert $5 \cdot 37 = 185$. Érdekes, hogy az ugyanezekből a számjegyekből álló 851 és 518 is osztható 37-tel (ellenőrizzük!). Mi lehet a magyarázat? Más, 37-tel osztható háromjegyű számokra is igaz a megfelelő tulajdonság?

93.12. Keressük meg az év összes olyan napját, amelyre igaz a következő tulajdonság: az év első napjától számított sorszáma megegyezik a hónap és a nap (szokásos) sorszámának szorzatával? (például január 5-ére igaz, mert $1 \cdot 5 = 5$.)

Kitűzött feladatok 13-14 éveseknek (7-8. osztályosoknak)

93.13. Egy város autóbusz-hálózatát kell megtervezni a következő feltételekkel:

a) minden megállóból minden megállóba átszállás nélkül el lehessen jutni;
b) bármely két különböző autóbuszvonalnak pontosan egy közös megállója legyen;
c) minden autóbuszvonalon 3 megálló legyen;
d) a városban legalább 4 megálló legyen.

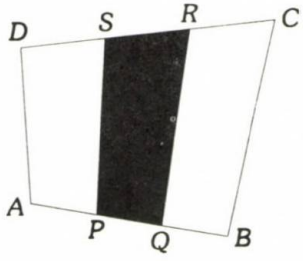
Hány megálló lesz összesen (A, B, C, ...)?
Hány autóbuszvonal lesz összesen (1, 2, 3, ...)?
Készítsünk táblázatot és „tervrajzot"!

93.14. $[x]$ (egészrész x) jelöli azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb x-nél. Pl.: $[2, 1] = 2$; $[-0, 8] = -1$. Keressük meg a következő egyenlet összes megoldását:

$$x + \frac{93}{x} = [x] + \frac{93}{[x]}$$

93.15. Melyek azok a háromszögek, amelyek felbonthatók két egybevágó háromszögre, és melyek azok, a háromszögek, amelyekre ez nem igaz?

93.16. A t területű $ABCD$ konvex négyszög AB oldalának két harmadolópontja P és Q, CD oldalának harmadolópontjai R és S. Mekkora a $PQRS$ négyszög területe? Általánosítsunk!



A kitűzött feladatok megoldását részletes indoklással kell leírni. A versenyzőktől elvárjuk, hogy önállóan dolgozzanak.

A megoldásokat a megjelenést követő hónap végéig kérjük beküldeni az alábbi címre:

MOZAIK Oktatási Stúdió 6723 Szeged, Pf. 301.

A borítékra kérjük, írják rá: *Matematika feladatmegoldó verseny.*

Hajnal Imre

Könyvismertetés

Urbán János: **MATEK$^+$ tizenöt éveseknek** – Matematika tehetséggondozás 15 éves korban (Feladatgyűjtemény megoldásokkal)

A könyv 112 oldalon, 8 részre tagolva, 188 feladatot tartalmaz, lényegremutató utalásokkal, természetes hangvételű szakmai tanácsokkal és megoldásokkal. Az ezekkel való foglalkozás nem kíván rendkívüli tehetséget, csak a tizenéveseknél általában meglévő érdeklődést, a gondolkodás és a tapasztalatszerzés értékeinek felismerését és az általános iskolában megszerzett matematikai ismereteket.

A feladatok témaköre változatos, a fejezetek sorrendjében a tartalom címszavai: prímszámok, oszthatóság, számelmélet, függvények, geometria, kombinatorika, számsorozatok, algebra és geometria, ismétlő feladatok, számtani és mértani közép, szélsőértékfeladatok, egy kis geometria, véges halmazok, valószínűségszámítás, kongruenciák, gráfok, „Absztrakció mint elvonatkoztatás" címmel rövid önálló olvasmány, vegyes feladatok, versenyfeladatok.

Az egyszerűen, érthetően fogalmazott feladatok gondolkodásra késztetők, sokrétűek, igényesek, a matematikai tehetség kibontakozásához kiválóan alkalmasak. Az is hasznos, hogy közülük sok általánosítható, erre utalás is felhívja a figyelmet. A témakörök változatossága, időnkénti visszatérése elősegíti az érdeklődés és a tudás elmélyítését.

A szerző, ahol szükséges, ott érthető módon, pontosan és mégis könnyedén rámutat egy-egy új fogalomra (például a kongruenciára, gráfokra, ...). A megoldásoknál közvetlen módon hívja fel a figyelmet a továbbvezető útra (például: „Érdemes itt arról beszélni ...", Megfigyelhetjük ..."). A problémamegoldás módszereire példát mutatnak a megoldások, több esetben a feladatok szövegezése is. (Példaként említjük az 1992. évi OKTV egyik feladatát, mely a kitűzött feladatok között van. Szövege idézőjelben szerepel, majd a szerző adott esetekre vonatkozó két kérdést úgy fogalmaz meg, hogy azok tanulságai segítségével a 15 évesek is megoldhatják az OKTV eredeti feladatát. Ebből a tanulók láthatják, hogy az általános szövegezésű problémák megoldását segítheti egy-egy adott értékkel végzett számítás tapasztalata. – Több hasonló példát is említhetnénk.)

Külön pedagógiai érdeme a könyvnek, hogy a szerző saját tapasztalataira is gyakran hivatkozik. (Például: „... a tanulók számára megfoghatónak tűnt ...", „Gyerekektől tanultam a következő bizonyítást ...) Ezzel egyrészt felhívja a tanárok figyelmét a tanulói gondolkodás megfigyelésére, az értékes tapasztalatok gyűjtésére és közzétételére, másrészt a tanulók közvetlenül is látják saját lehetőségeiket, érezhetik, hogy ők is képesek olyan gondolatok felismerésére, olyan ötletek megfogalmazására, amelyet a tanáruk feljegyzésre is méltónak talál.

Összegezve: a könyv igen hasznos a matematika iránt érdeklődő tanulóknak és a velük foglalkozó tanároknak nagy segítséget nyújt.

Kosztolányi József–Mike János–Vincze István

Érdekes matematikai feladatok

A szegedi Radnóti Miklós Gimnázium 1987 óta minden tanévben az általános iskolák hetedikesei, illetve hatodikosai számára ötfordulós feladatmegoldó versenyt rendez. A verseny célja, hogy a matematika iránt érdedeklődő, a problémamegoldást kedvelő diákok számára egy megmérettetési lehetőséget biztosítson. Másrészről a feladatok megoldásának a bemutatásával módszereket ismertessen meg, valamint a tanterv szerint kijelölt témakörök kiterjesztésére a diákok, valamint az őket oktató tanárok figyelmét felhívja.

A versenyen való részvétel bárkinek jó alapot biztosít ahhoz, hogy a gimnáziumban ma már igen szép eredményekkel rendelkező Matematika Iskola néven ismertté vált osztályokban tanuló diákok a hatosztályos tanítási formát követve már 12 éves korban kezdik el tanulmányaikat a gimnázium falain belül, és a matematikát magasabb óraszámban a speciális tagozat tantervének megfelelően sajátítják el. A kezdetben kísérletként induló oktatási forma sikerét ma már több országos hírű gimnáziumban való bevezetése is bizonyítja.

A feladatgyűjtemény elkészítésénél a levelező versenyben kitűzött feladatok szolgáltak alapul. (A szerzők mindhárman a Radnóti Miklós Gimnázium tanárai.) Természetesen a 290 feladat tematikus csoportosítása során felmerült, hogy néhány fejezet kiegészítése is megtörténjen.

A kötet egyes fejezetei

Halmazok, logika (31 feladat)
Szöveges feladatok (52 feladat)
Oszthatóság, számelmélet (55 feladat)
Algebra (31 feladat)
Geometria (60 feladat)
Vegyes feladatok (61 feladat)

Az utóbbi fejezetben néhány érdekes kombinatorikai, gráfelméleti jellegű feladat is helyet kapott.

A gyűjtemény készítésénél felhasználtuk azokat a személyes tapasztalatokat, amelyeket tehetséges gyerekekkel való foglalkozásaink során szereztünk, valamint azokat a konkrét javaslatokat, amelyeket kollégáinktól kaptunk. Külön köszönet illeti Pósa Lajost ötleteiért, konkrét feladatjavaslataiért és személyes támogatásáért.

A feladatok megoldásához az általános iskolában tanult matematika tananyag ismerete elég. Ugyanakkor a kötet a középiskola első osztályaiban is jól használható az érdeklődés felkeltésére, motiválásra, az általános iskolai anyag felfrissítésére, és természetesen a gondolkodás fejlesztésére. A *Megoldások* részben egyébként valamennyi feladat részletes megoldása is megtalálható.

A könyv segédeszköz lehet az iskolai tanórán, a kiegészítő szakköri foglalkozásokon és az otthoni felkészülésben a tanárok és a diákok számára egyaránt. A tematikus csoportosítás lehetővé teszi, hogy egy-egy tanév során egy iskolai szakkör munkáját a könyv alapján tervezzük meg. Lehetőségünk van arra, hogy az egyes témaköröket tegyük teljessé, azaz csak egy fejezettel foglalkozzunk, illetve használhatjuk a könyvet házi matematikaversenyek összeállításánál is. Ajánlható a példatár még versenyekre való felkészüléshez, egy-egy témakör (számelmélet, logika) tanításának bevezetéséhez, felépítéséhez.

A feladatok egy része lehetőséget kínál az általánosításra, ami újabb problémák kitűzését, új feladatok elkészítését teszi lehetővé.

A MOZAIK Oktatási Stúdió tankönyvajánlata az 1994/95-ös tanévre

Az alábbiakban felsorolt kiadványok a MOZAIK Oktatási Stúdió kiadványai, melyek szerepelnek az 1994/95-ös tanév tankönyvlistáján. A tankönyvlista 1994. januárjában kerül az iskolákba.

Biológiai feladatok középiskolásoknak

Jól felkészültem-e?
Komplex munkafüzet bilógiából
6., 7., 8. osztály

Hogyan oldjunk meg fizikai feladatokat?

Fizikai feladatok gyűjteménye általános iskolásoknak

Fizika tankönyv + munkafüzet
12., 13., 14. éveseknek

Rendszerező kémia mintapéldákkal, feladatokkal

Természetföldrajz I.
A Föld belső erői

A magyar nyelv I.

Kisiskolások anyanyelvi gyakorlókönyve
1., 2., 3., 4. osztály

Kisiskolások magyar nyelv könyve
1-2., 3., 4. osztály

Meséről-mesére
Munkafüzet a szövegértés fejlesztésére

Fogalmazás lépésről-lépésre I., II.
Munkafüzet a kifejezőkészség fejlesztésére

Mentsük meg Szederkét!
Játékos munkafüzet a fogalmazás tanulásához

Irodalom tankönyv + munkafüzet
13 éveseknek

Matematikai ismeretek
13-14 éveseknek

Matematikai fogalmak, tételek

MATEMATIKA Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek

Matematikai gyakorló munkafüzet
2., 3., 4. osztály

Német nyelv - középfokú nyelvvizsgára készülőknek

A leggyakoribb német beszédfordulatok

imasoft